J. P. Moreno

Universidad Autónoma de Madrid

Conjuntos de anchura constante

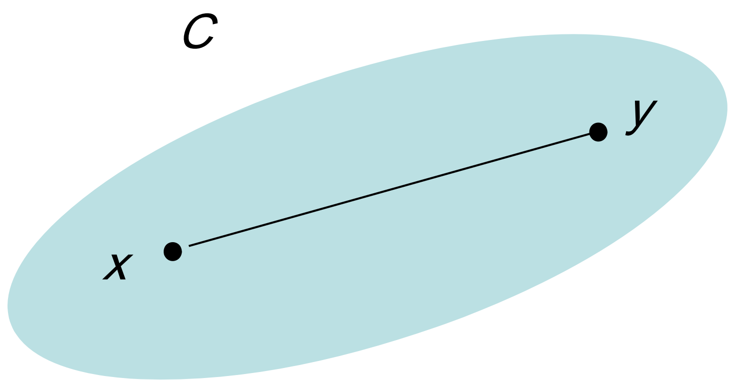
Instituto de Matemáticas Universidad Sevilla
A. de Castro Brzezicki

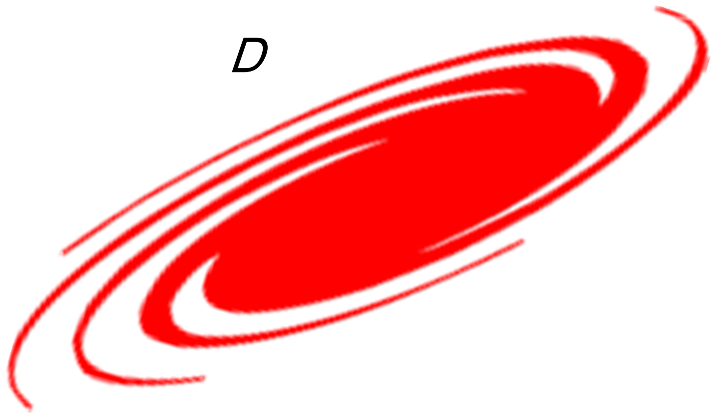
Sevilla

23 de Noviembre

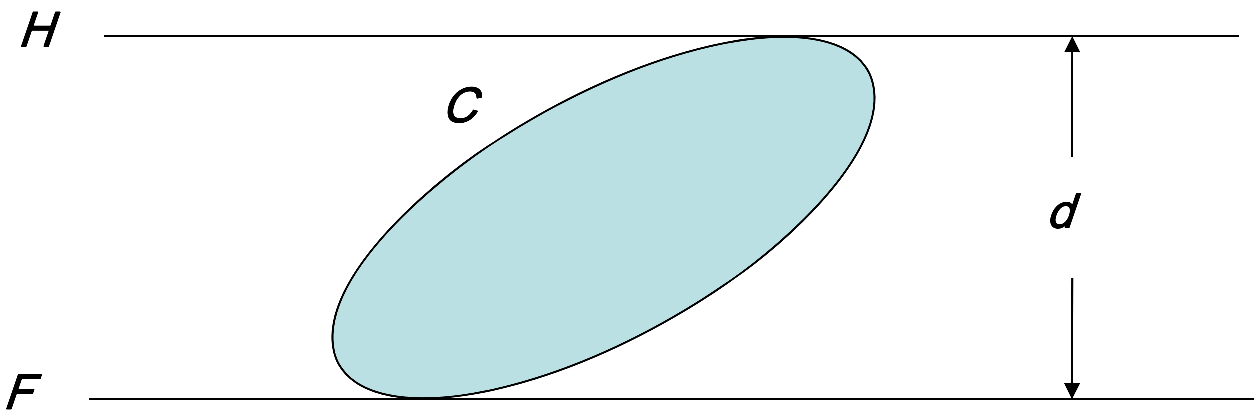
Introducción: qué es un conjunto de anchura constante.

La noción de convexidad juega un papel fundamental en muchas ramas de las matemáticas. Un conjunto *C* se llama convexo cuando para cualquier par de puntos *x*, *y* de ese conjunto *C* el segmento que los une está totalmente contenido en *C*



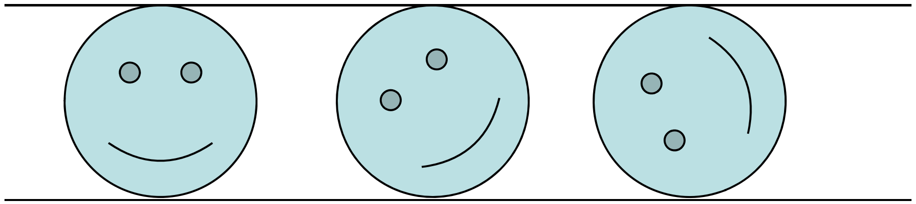


Decimos que H es una recta soporte de un conjunto C si interseca al conjunto pero no a su interior y además C está contenido en uno de los dos semiespacios definidos por C. Podemos considerar dos rectas soporte paralelas y medir su distancia

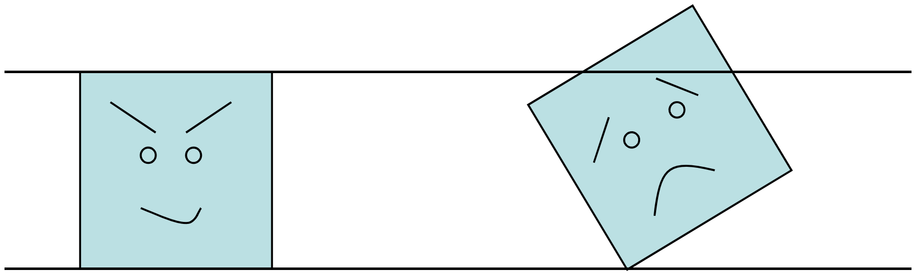


Si la distancia entre cualquier par de rectas soporte es siempre d decimos que C tiene anchura constante d

Para tener una idea cabal de lo que significa la definición, pensemos que un cuerpo de anchura constante d puede girar libremente entre dos rectas que estén a distancia d sin perder contacto con ninguna de las dos



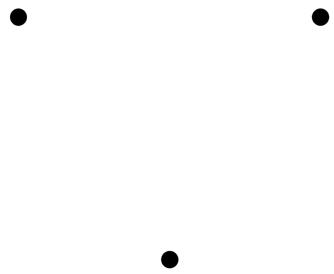
Mientras que un cuerpo que no tenga anchura constante no puede hacerlo



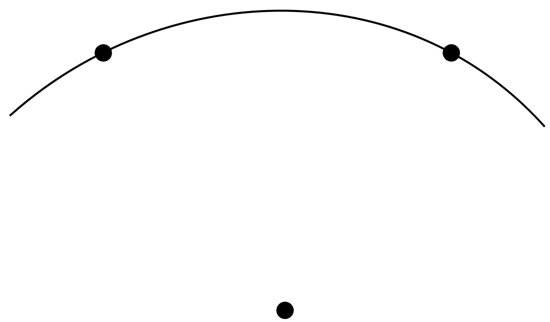
Surgen dos preguntas, de forma natural:

1. ¿Existen conjuntos de anchura constante que no sean círculos?
2. ¿Cómo construirlos?

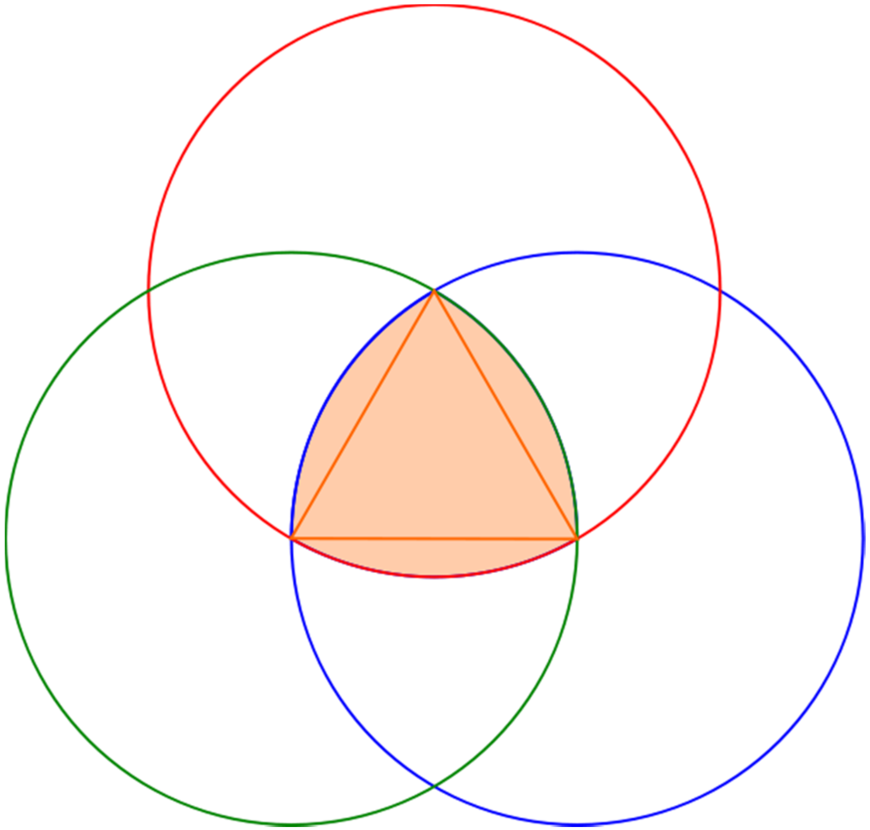
Fijamos tres puntos que estén a la misma distancia (los vértices de un triángulo equilátero



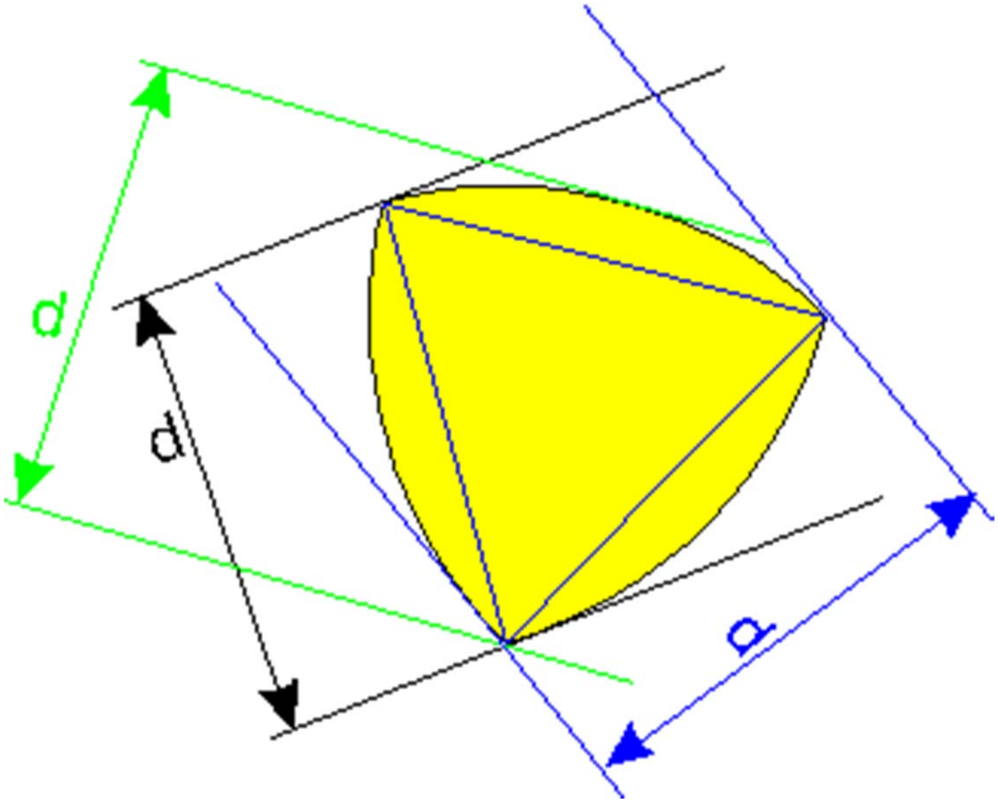
Trazamos un arco de circunferencia con centro en un punto y que contenga a los otros dos

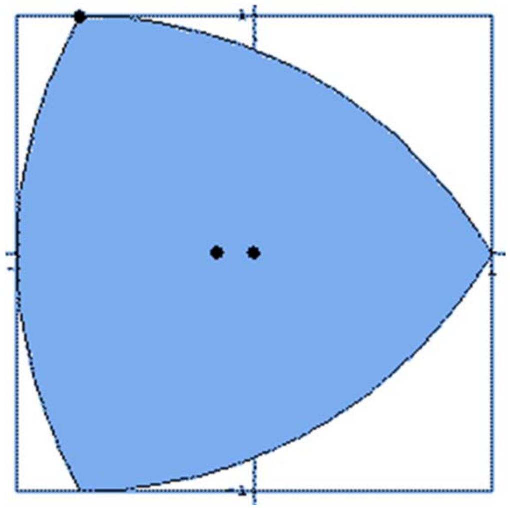


Repetimos la misma operación con los otros dos puntos:

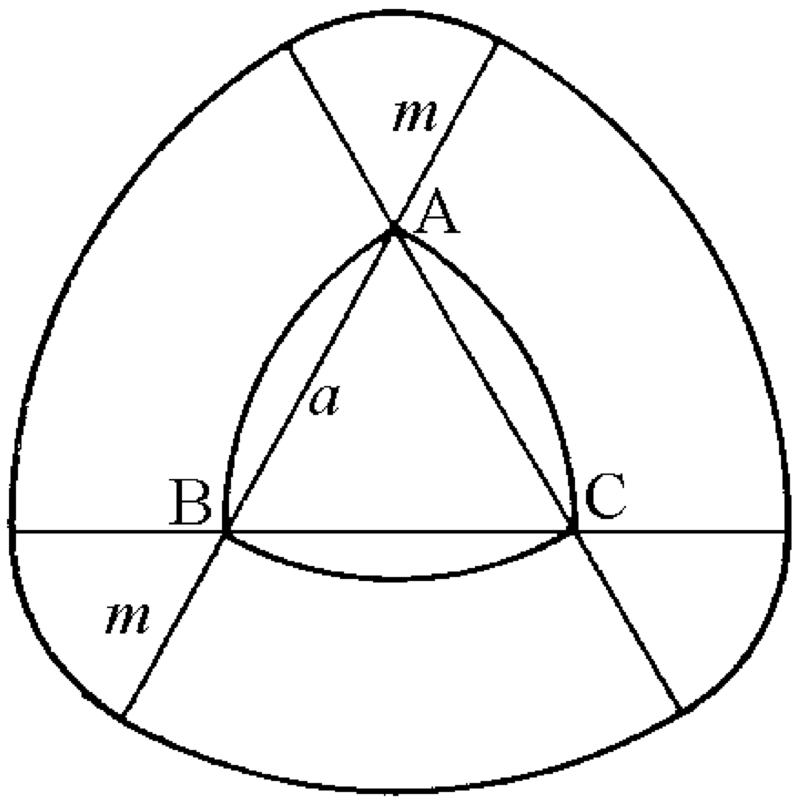


El conjunto convexo encerrado, que se conoce como **Triángulo de Reuleaux**, tiene anchura constante.

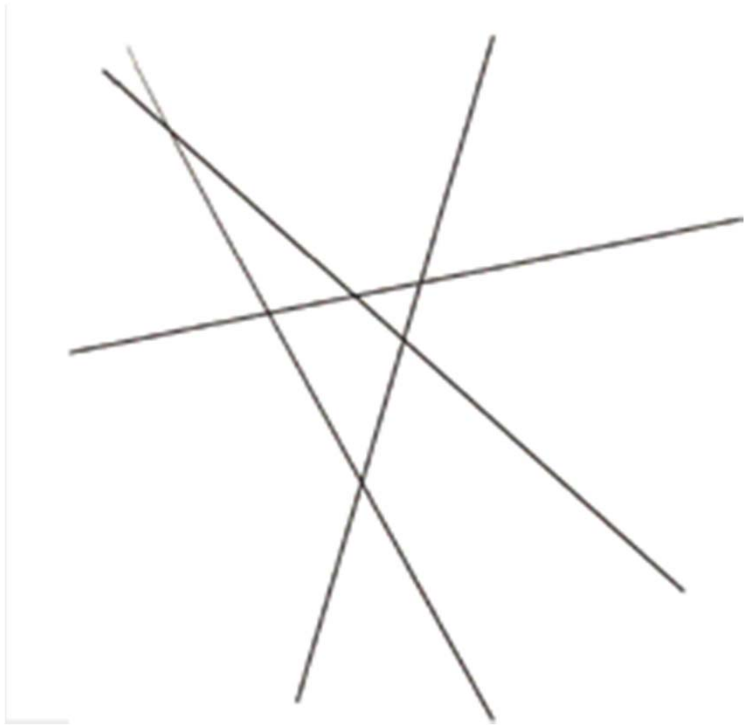

d
d
d



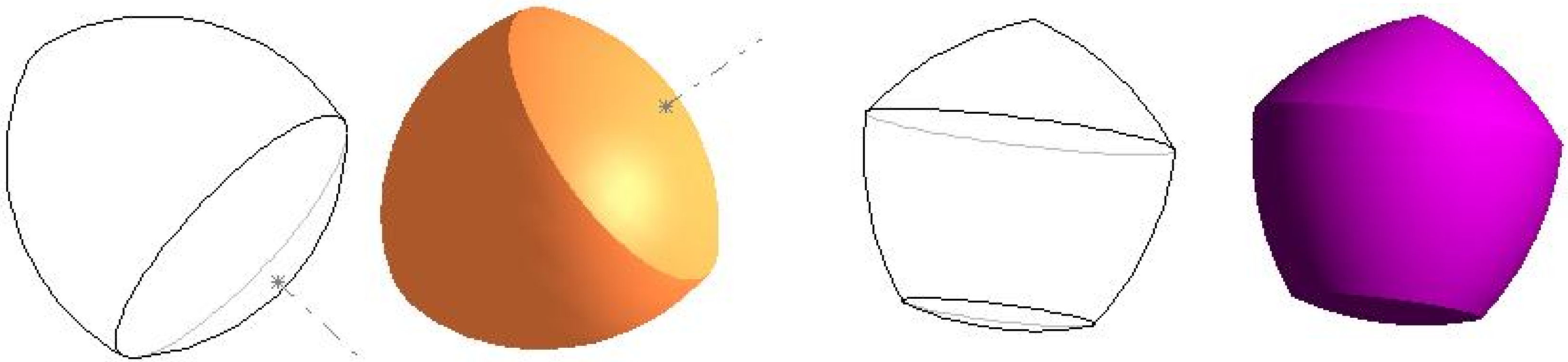
Este otro conjunto de anchura constante se obtiene sumando una bola a un **triángulo de Reuleaux**.



Existe una manera sorprendente de construir curvas de anchura constante: Dibujamos tantas líneas rectas como queramos, pero con intersección dos a dos. Cada arco de nuestra curva será un arco de circunferencia con centro en una intersección P y encerrado por las dos rectas cuya intersección es P. Se empieza desde cualquier intersección y se continua conectando cada arco con el anterior. Si se hace con cierto cuidado, la curva se cierra y tiene anchura constante.



En tres dimensiones se suele hablar de *sólidos de anchura constante*. Se obtiene uno de éstos al girar el conjunto anterior alrededor de un eje de simetría que pasa por el centroide (centro del mayor círculo contenido en el conjunto) y por un vértice.

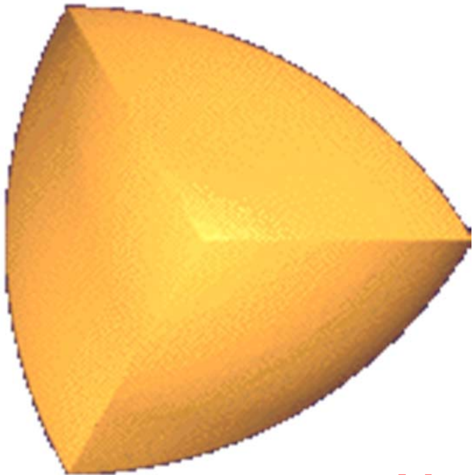


La pregunta natural es…¿qué pasa con el análogo en tres dimensiones del triángulo de Reuleaux?

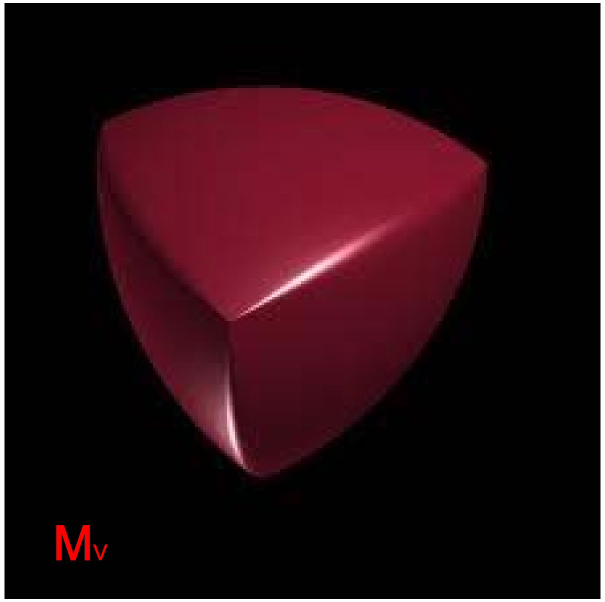
El análogo en tres dimensiones del triángulo de Reuleaux no tiene anchura constante.

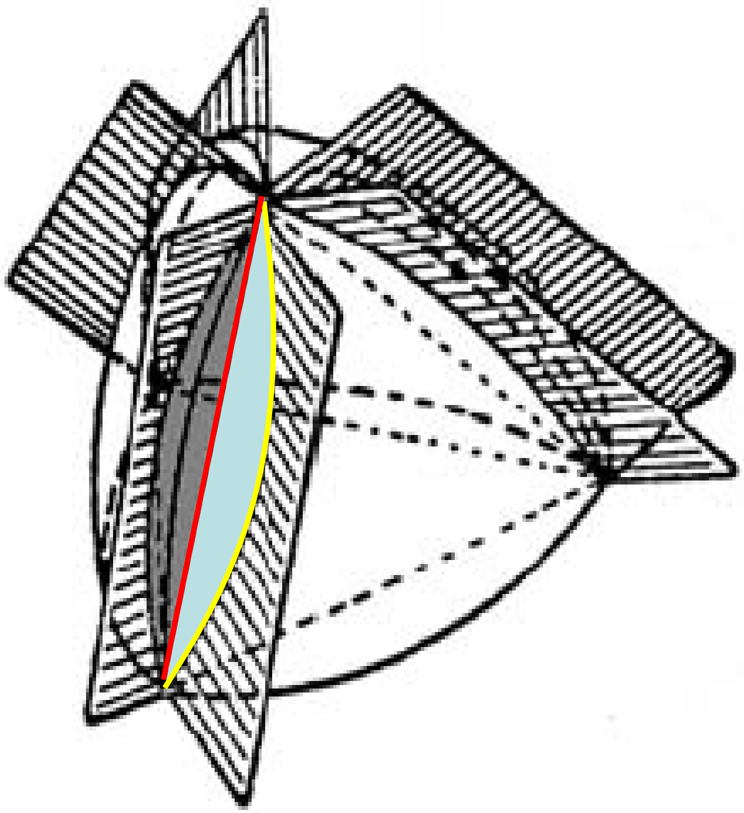
$$(\sqrt{3} - \sqrt{2}/2)s \approx 1.0249s.$$

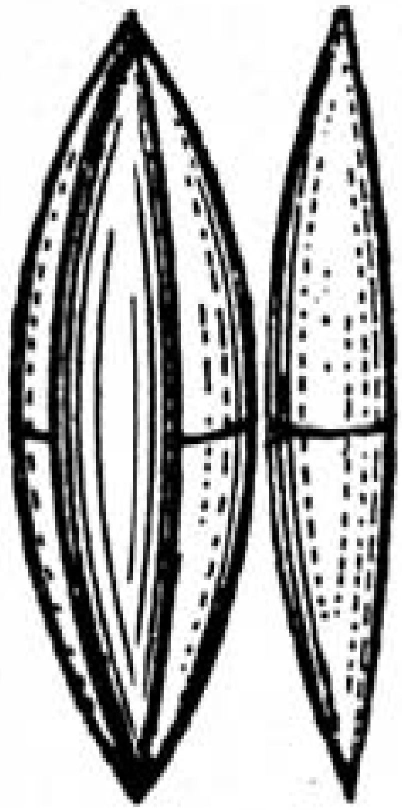
Un tetraedro de Reuleaux se puede modificar para que tenga anchura constante: se reemplazan tres aristas (que formen un triángulo o que compartan un vértice) por secciones de revolución de un arco de circunferencia obteniéndose los famosos cuerpos de Meissner.



M_F

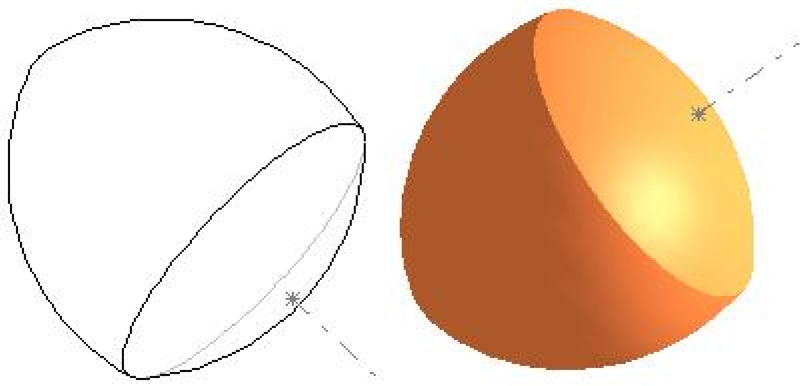






Se reemplaza la zona sombreada por la superficie toroidal obtenida al girar el arco amarillo alrededor del eje rojo…

Se sabe que el triángulo de Reuleaux es el conjunto de anchura constante (con diámetro positivo prefijado) que tiene menor área (teorema de Blaschke y Lebesgue 1915 y 1914) pero no se sabe cual es el cuerpo de anchura constante prefijada de menor volumen. Entre los que son de revolución sí se conoce la respuesta: un triángulo de Reuleaux de revolución (Campi et al. 1996).



El cuerpo de anchura constante (con diámetro positivo prefijado) que minimiza el volumen también minimiza el área de la superficie (Blaschke 1915).

Se ha especulado con que el sólido de anchura constante que minimiza el volumen debe tener el mismo grupo de isometrías que un tetraedro regular, cosa que ninguno de los cuerpos de Meissner M_F, M_V tienen. Una posibilidad entonces es considerar la suma de Minkowski

$$M = \frac{1}{2}M_F + \frac{1}{2}M_V$$

que sí las tiene (y es de la misma anchura constante). Sin embargo, la desigualdad de Brunn-Minkowski implica que

$$\left[\mu\left(\frac{1}{2}M_F + \frac{1}{2}M_V\right)\right]^{1/3} > \frac{1}{2}\mu(M_F)^{1/3} + \frac{1}{2}\mu(M_V)^{1/3}$$

de hecho, M tiene un 2% más de volumen que M_V y M_F.

Sea X un espacio de dimensión finita, D_2 la familia de todos los subconjuntos de anchura constante 2, y $\mathcal{D}_X$ el espacio cociente que resulta al considerar las clases de equivalencia por traslación: si $K \in D_2$, denotamos $[K] = \{K + t : t \in \mathbb{R}^n\}$. El espacio $\mathcal{D}_X$ tiene cierta estructura lineal, y se pueden considerar sus conjuntos extremos.

Teorema. *Si la norma de X es estrictamente convexa y $C \in D_2$ tiene volumen mínimo, entonces $[C]$ es un extremo de $\mathcal{D}_X$.*

Proposición. La clase de traslación de un cuerpo de Meissner es un extremo de $\mathcal{D}_{\ell_2^3}$.

J. P. Moreno y R. Schneider, *Structure of the space of diametrically complete sets in a Minkowski space*, aparecerá en Disc. Comp. Geom.


¿5000 años de antigÜedad?

Ventana de la catedral de Valencia.

Iglesia de Notre Dame (Brujas) Siglo XIII

Catedral de Esslingen


Catedral de León


Catedral de Barcelona


Catedral de Utrecht

XII

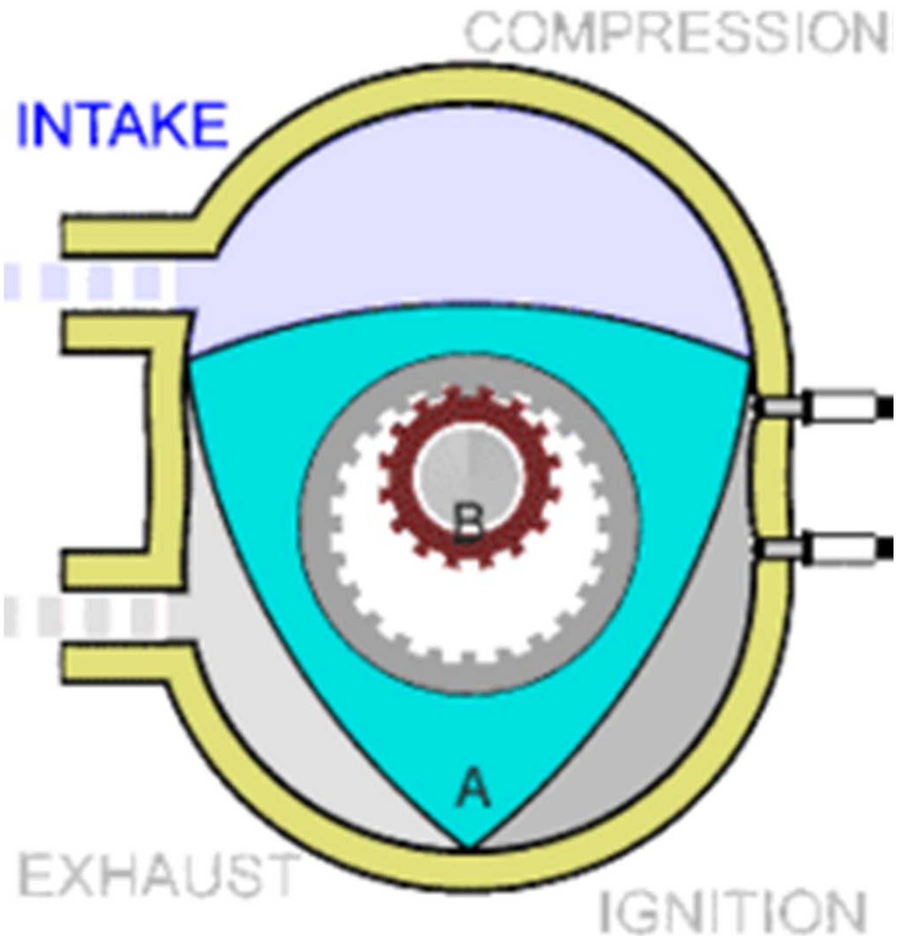
IV

Collserola, Barcelona photographed by Richard Moore
The Transmission Gallery - tx.mb21.co.uk/gallery

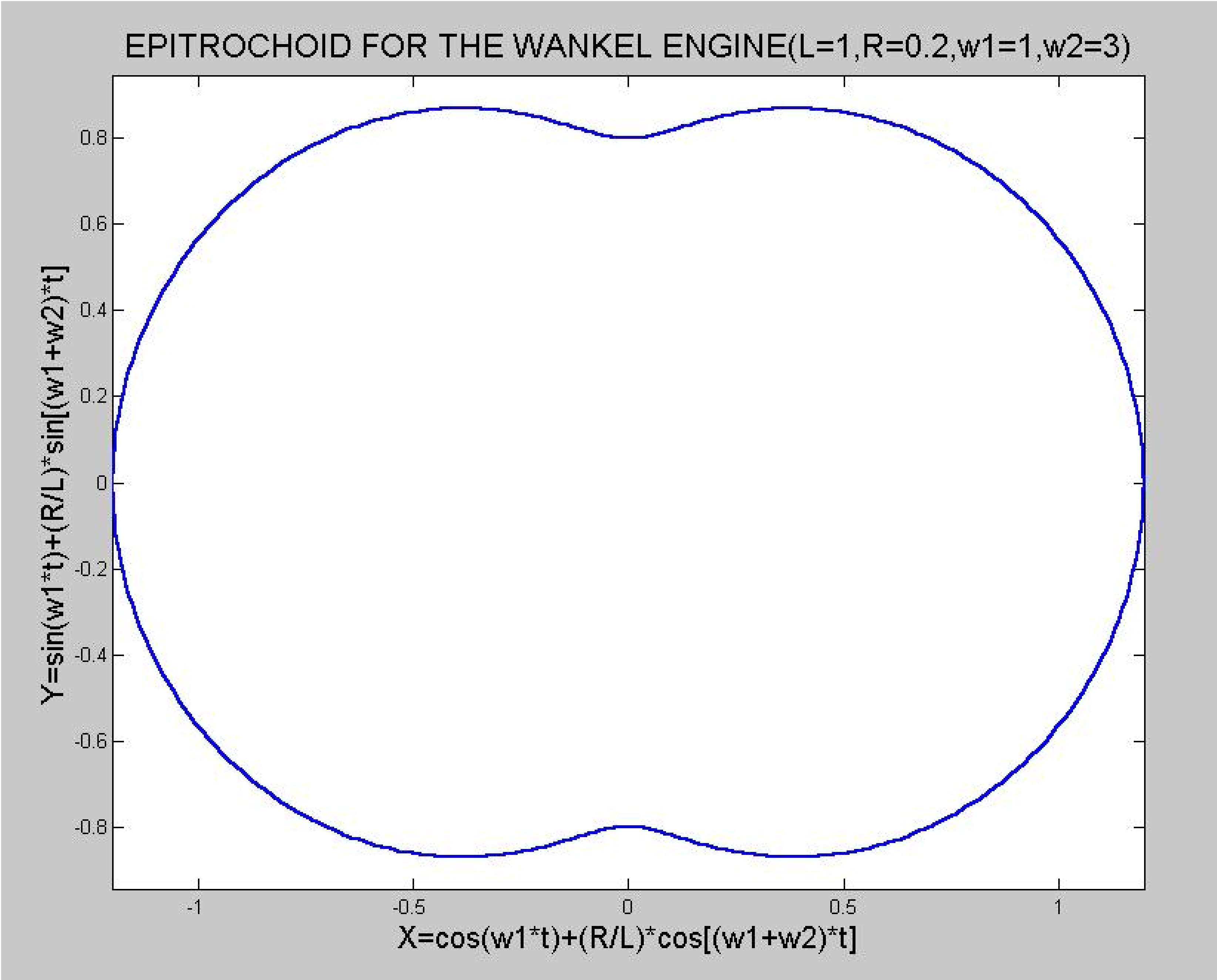
Aplicaciones técnicas

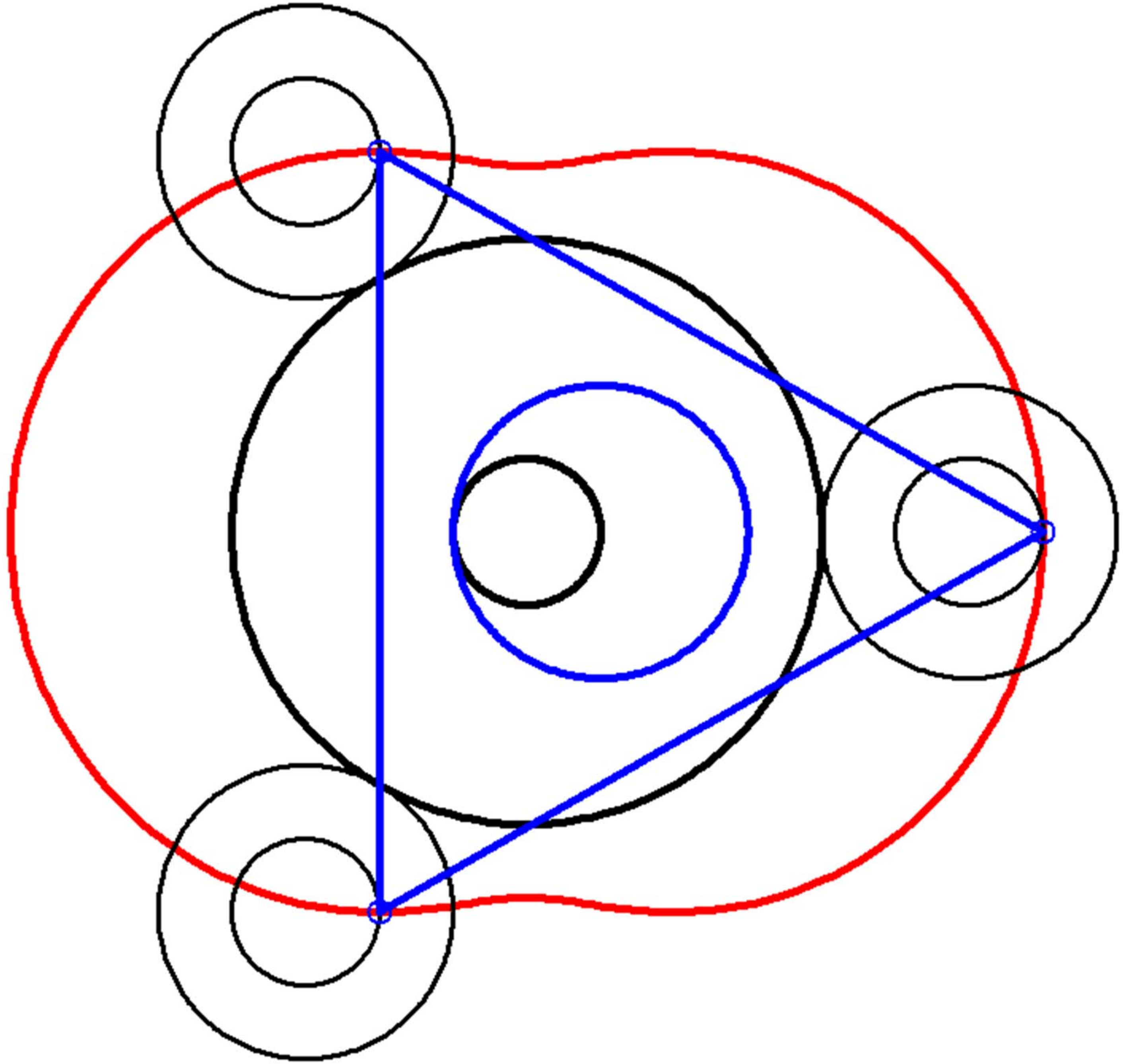
1. Motor rotativo, de pistón rodante o Wankel

El rotor tiene la forma de un triángulo de Reuleaux y gira orbitalmente. Actualmente, sólo Mazda ofrece motores Wankel en coches de serie (RX-8). Pesa y ocupa la tercera parte que su equivalente con pistones, pero tiene problemas de estanqueidad. Presenta ventajas para usar hidrógeno como combustible.



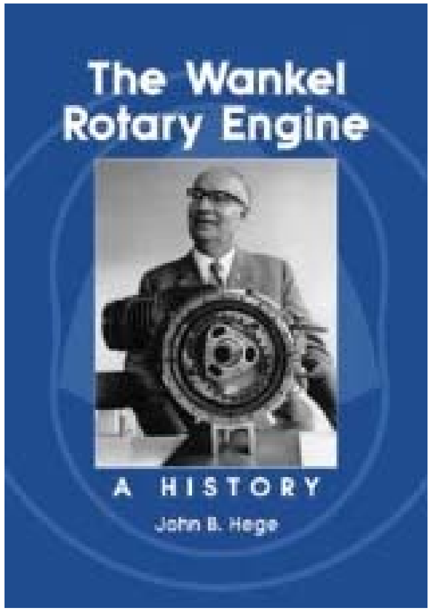
COMPRESSION
INTAKE
B
A
EXHAUST
IGNITION

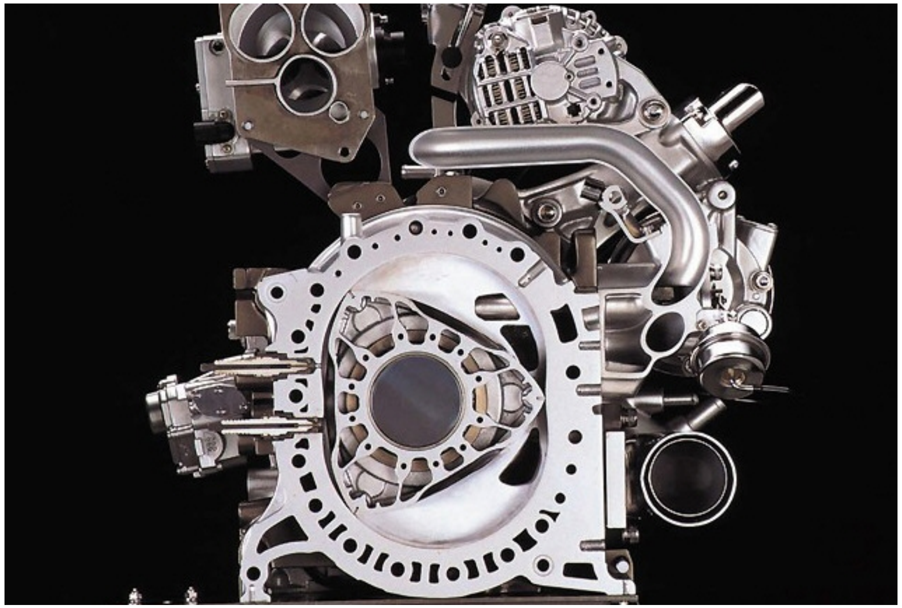

EPITROCHOID FOR THE WANKEL ENGINE(L=1,R=0.2,w1=1,w2=3)
Y=sin(w1*t)+(R/L)*sin[(w1+w2)*t]
X=cos(w1*t)+(R/L)*cos[(w1+w2)*t]
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
-0.5
0
0.5
1



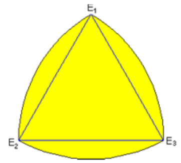

NSU


NSU
WANKEL


The Wankel
Rotary Engine
A HISTORY
John B. Hege




FELIX WANKEL

El nombre de triángulo de Reuleaux para la figura  se debe al

ingeniero y profesor Franz Reuleaux (1829-1905). Demostró sus propiedades de anchura constante (que ya eran conocidas por Euler) y fue el primero en usarlo en mecanismos (aunque se puede leer en algún sitio que su primera intención tenía que ver con su aplicación a la industria textil)

DE
CVRVIS TRIANGVLARIBVS.

Auctore
L. EVLER.

§. 1.

Curuas triangulares voco, quae tribus arcubus A B, A C et B C intus inflexis conſtant, qui in an- Tab. I. Fig. 1.

gregie conueniunt, breuitatis gratia *Orbiformes* nominemus, hicque ante omnia obſeruaſſe iuuabit, ex qualibet curua orbiformi problema catoptricum ſupra memoratum infinitis modis facillime reſolui poſſe. Sit enim F G H talis curua orbiformis quaecunque, intra qua punctum

Franz Reuleaux creó mas de 800 modelos de mecanismos y autorizó a la empresa alemana Gustav Voigt Mechanische Werkstatt, en Berlin, a fabricar más de 300 de estos modelos para su uso con fines pedagógicos en escuelas técnicas. En 1907, 368 modelos estaban disponibles en el catálogo de Voigt. Hoy en día, la mayor colección de estos modelos (220) se encuentra en la universidad de Cornell.

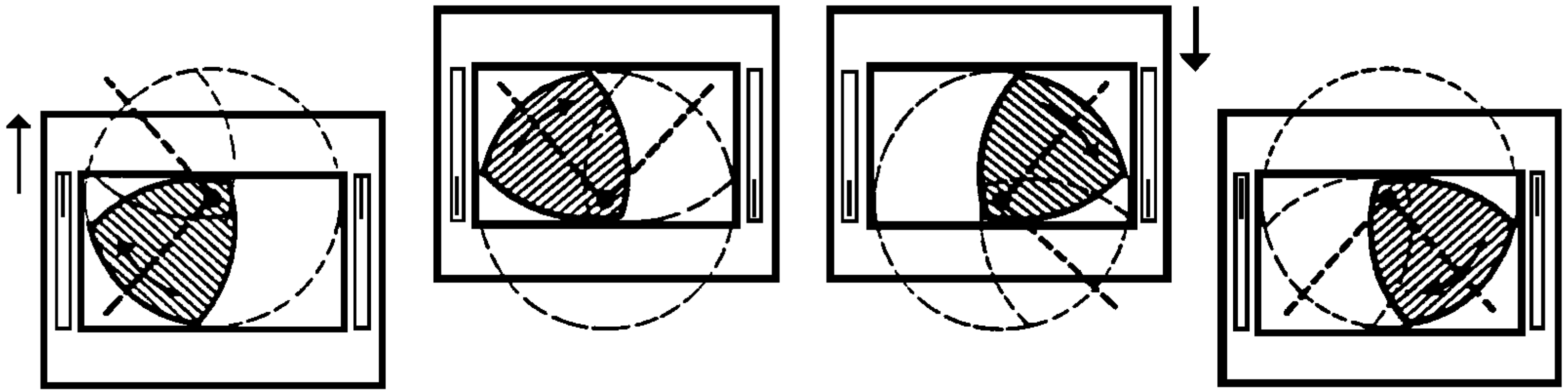

L4

2. Monedas

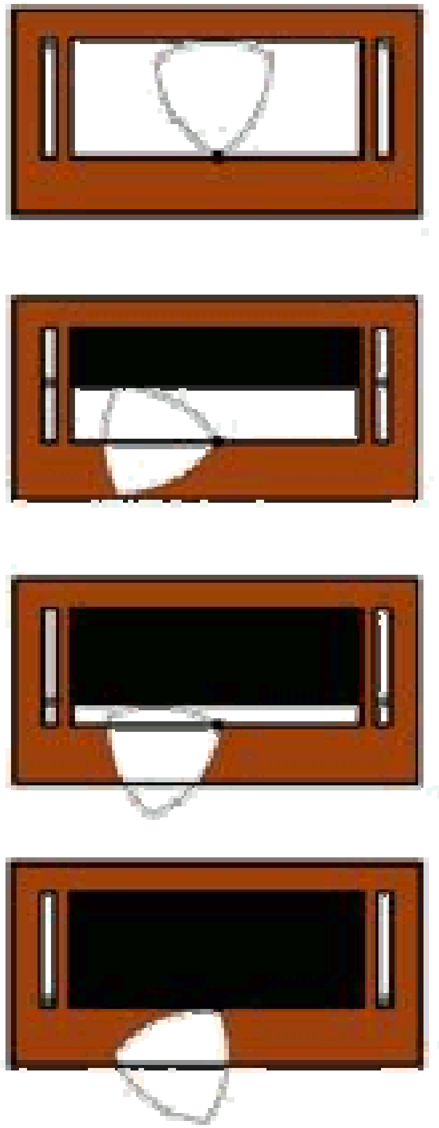
Los conjuntos de anchura constante funcionan bien en las máquinas que operan con monedas, ya que pueden girar en lugar de deslizar. Los ciegos las pueden reconocer con facilidad

3. Proyectores de cine.

Usando un triángulo de Reuleaux, se puede conseguir un movimiento intermitente.

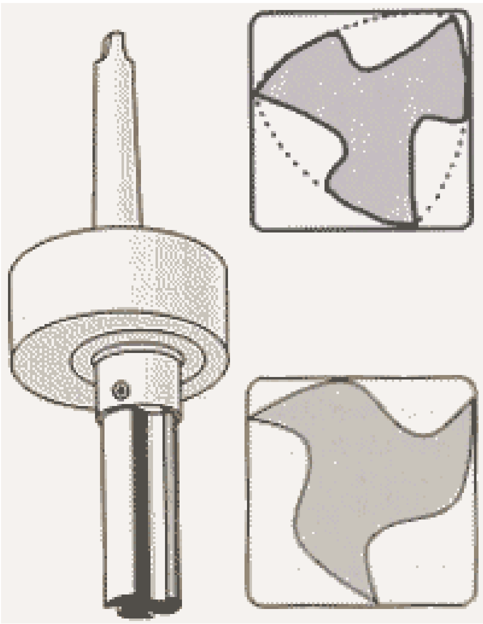


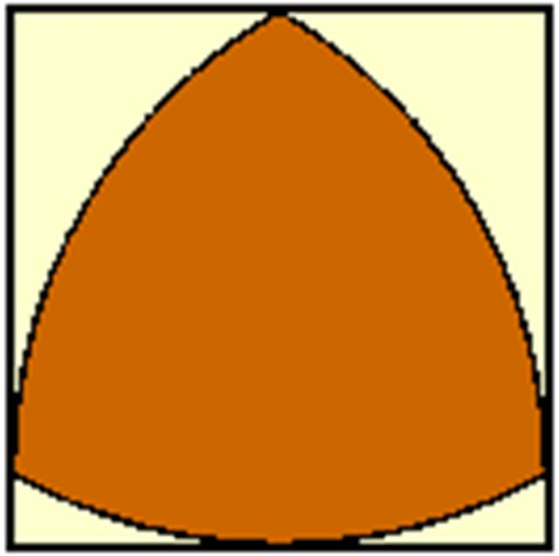
La proyección de películas se basa en la permanencia de un fotograma en la pantalla durante un breve espacio de tiempo (1/24 seg), tras el cuál la película debe girar para pasar al siguiente fotograma, momento en el que el obturador debe quedar cerrado para que no aparezca una imagen borrosa. El mecanismo de obturación (que produce un ruido característico) se hace mediante un triángulo de Reuleaux que gira alrededor de uno de sus vértices. La pantalla de obturación está apoyada en dicho triángulo.



4. Taladro para agujeros (casi) cuadrados

Fue patentado por Harry Watts en 1930





5. Cierre de bocas de riego.

Un cilindro no serviría para este propósito

6. Moda y diseño.

7. Deporte (de competición).

Propiedades de los conjuntos de anchura constante

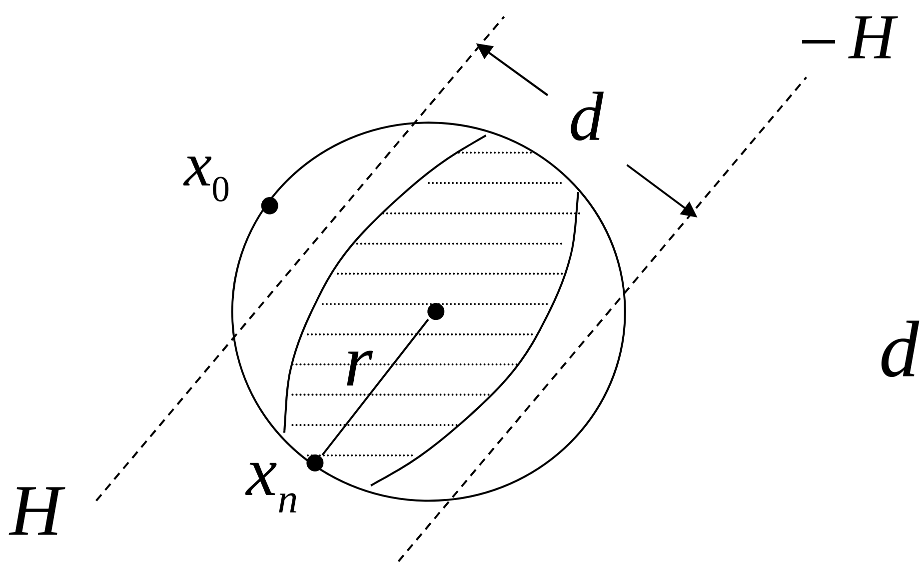
1. No tienen simetría central: un conjunto de anchura constante que tenga un centro de simetría tiene que ser, necesariamente, una bola.

Dem: Podemos suponer que el centro de simetría es el origen. Si consideramos

$$r = \sup\{\| x \| : x \in C\}$$

es claro que $C \subset rB$ y lo único que tenemos que hacer es probar la inclusión contraria. Primero, notemos que $diam C = 2r$ (para cada $n \in N$ existen puntos $x_n \in C : \| x_n \| \geq r - \frac{1}{n}$ y, además, nuestro conjunto es simétrico respecto al origen.

Supongamos que existe un punto $x_0 \in rB$, $x_0 \notin C$



$$d < 2r$$

2. C tiene anchura constante d si y sólo si C-C es la bola unidad de radio d

Dem: la suma de conjuntos de anchura constante, tiene también anchura constante; como, además, C-C tiene al cero como centro de simetría, resulta que C-C es una bola de centro 0; ¿qué radio tiene?

Para cada funcional del dual con norma 1, se tiene que

$$\sup f(C-C) = \sup f(C) - \inf f(C) = d$$

de modo que $C-C$ tiene radio d . Recíprocamente, si C-C=dB , entonces

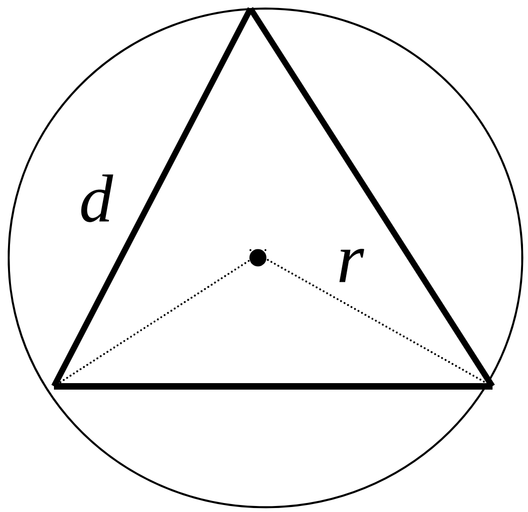
$$d = \sup f(C-C) = \sup f(C) - \inf f(C)$$

de manera que $C-C$ tiene anchura constante d

3. Si un conjunto C tiene anchura constante, la inesfera y la circunsfera son concéntricas y la suma de sus radios es $d = diam\ C$

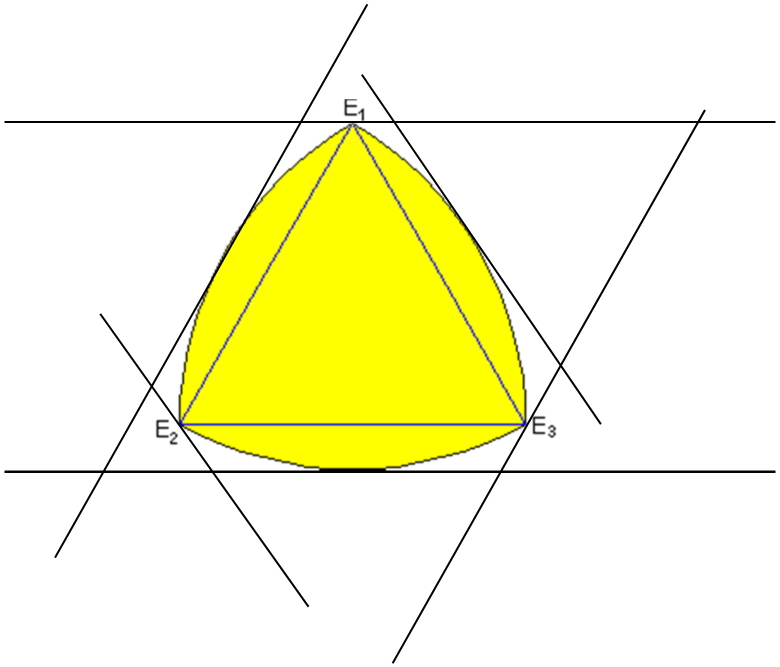
4. Cualquier conjunto con diámetro d está contenido en un conjunto de anchura constante d.

Este resultado no es cierto si, en lugar de conjuntos de anchura constante, consideramos bolas



$$2r > d$$

5. Si $C \subset R^2$ tiene anchura constante *d* , se puede inscribir en un hexágono regular de anchura mínima *d*



Se escogen tres direcciones con los ángulos adecuados y después se rotan para conseguir que los lados sean iguales.

6. Teorema de Barbier Si $C \subset R^2$ tiene anchura constante d, entonces su perímetro L es πd

La idea es utilizar la fórmula de Cauchy

$$L = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} B(\phi)\,d\phi$$

donde $B(\phi)$ es la longitud de la proyección de C en la dirección ϕ

7. Teorema de Blaschke-Lebesgue De todos los conjuntos planos de anchura constante d, el triángulo de Reuleaux es el que tiene área mínima.

La *desigualdad isoperimétrica* dice que el círculo es precisamente el que tiene área máxima.

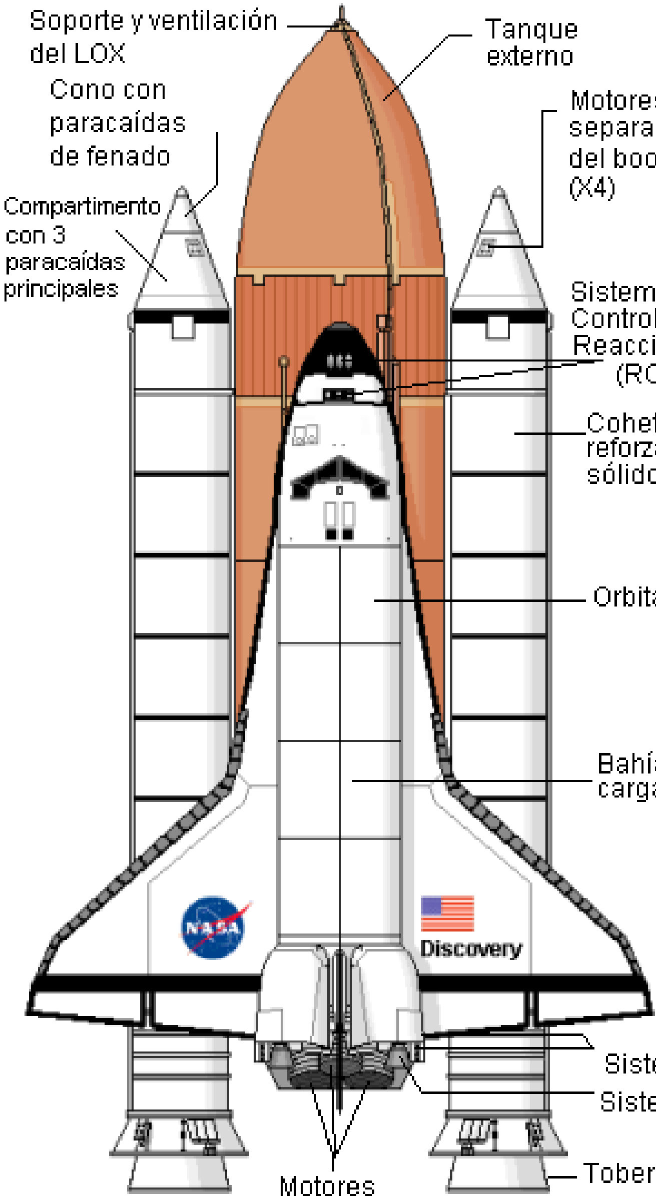
A modo de resumen: a la pregunta de por qué las tapas de las alcantarillas son redondas y no de otra forma, por ejemplo cuadradas, podemos ahora responder que no importa la forma que tengan siempre que ésta sea de anchura constante, para que la tapa no se vaya nunca dentro del agujero. Y lo más razonable es que sean redondas, porque es el conjunto de anchura constante de mayor área y porque se pueden colocar sin tener en cuenta ninguna posición especial.


y si visitamos un edificio y miramos al techo sabremos decir si es de anchura constante…
Museo Mercedes, Stutgart


…o si no lo es…
Departamento de Matemáticas, UNEX


Y entenderemos el error que cometían los ingenieros de la NASA en el test para decidir si las partes de los cohetes propulsores de los transbordadores espaciales eran reutilizables.

Configuración del Transbordador Espacial



Orbitador

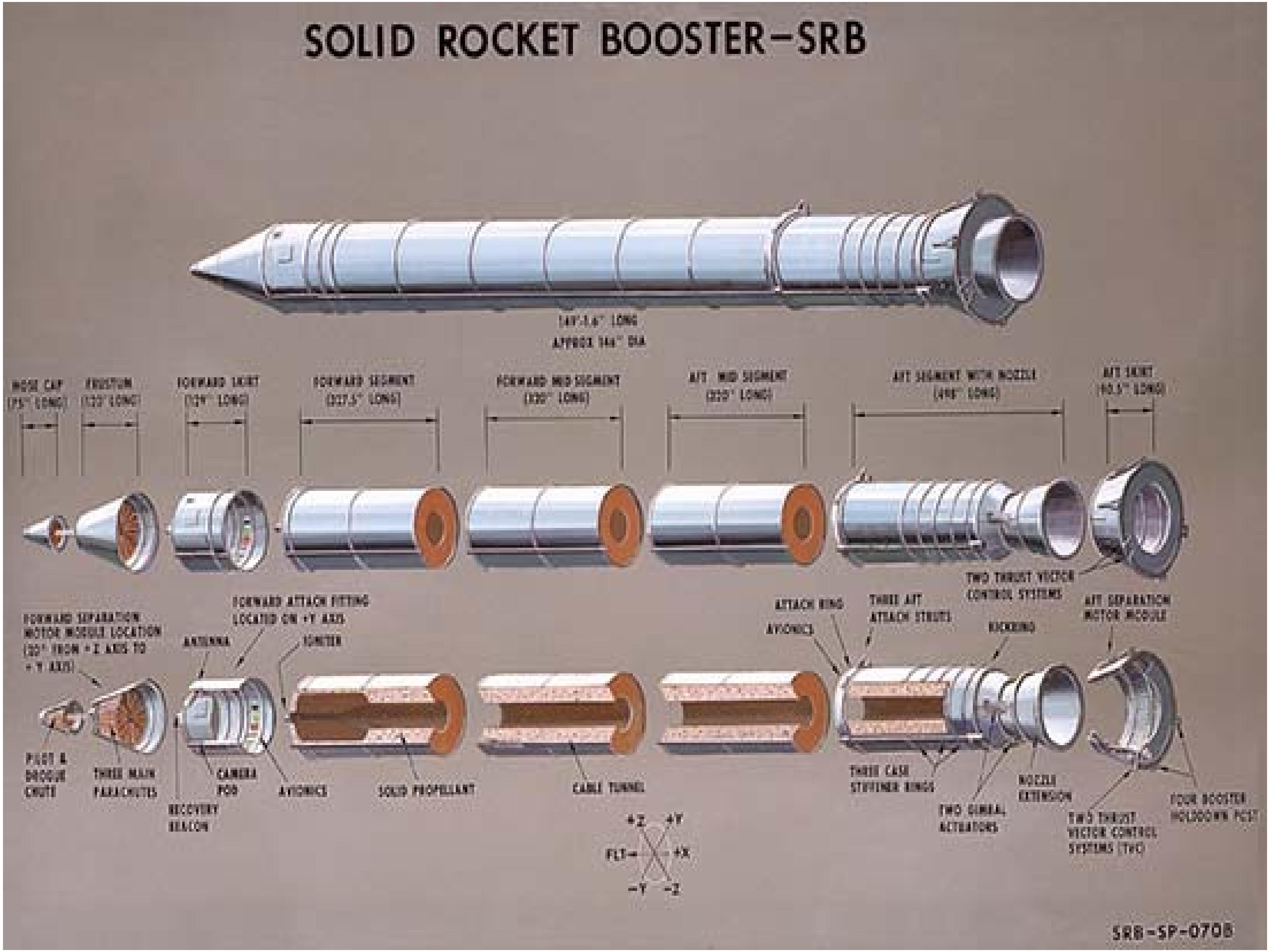
Altura estacionado: 17,4 mts.
Longitud: 37,24 mts.
Diámetro: 23,79 mts.
Peso al aterrizaje: 90.718 kg. (varía)
Empuje del motor principal (3):
1.668.000 newtons (c/u) al nivel del mar,
2.090.560 newtons en el vacío
Bahía de carga:
Diámetro: 4,6 mts.
Longitud: 18,29 mts.
Peso de carga útil: 22.680 kg. (Aprox.)

Tanque externo

Longitud: 47 mts.
Diámetro: 8,4 mts.
Peso cargado: 760.234 kg.
Peso vacío: 29.938 kg.
Combustible: Oxígeno líquido (LOX) e hidrógeno líquido (LH2).
Tanque LOX: 542.641 litros (máximo).
Tanque LH2: 1.458.382 litros (máximo).

Cohete reforzador sólido (Booster)

Longitud: 45,46 mts.
Diámetro: 3,7 mts.
Peso: 589.680 kg.
Combustible: Perclorato de amonia
Empuje al despegue: 13,6 millones de newtons


SOLID ROCKET BOOSTER–SRB
NOSE CAP
FRUSTUM
FORWARD SKIRT
FORWARD SEGMENT
FORWARD MID SEGMENT
AFT MID SEGMENT
AFT SEGMENT WITH NOZZLE
AFT SKIRT
TWO THRUST VECTOR CONTROL SYSTEMS
FORWARD SEPARATION MOTOR MODULE LOCATION
FORWARD ATTACH FITTING
ANTENNA
IGNITER
PILOT & DROGUE CHUTE
THREE MAIN PARACHUTES
RECOVERY BEACON
CAMERA POD
AVIONICS
SOLID PROPELLANT
CABLE TUNNEL
ATTACH RING
THREE AFT ATTACH STRUTS
AVIONICS
AFT SEPARATION MOTOR MODULE
THREE CASE STIFFENER RINGS
TWO GIMBAL ACTUATORS
NOZZLE EXTENSION
TWO THRUST VECTOR CONTROL SYSTEMS (TVC)
FLT
+Z
+Y
+X
−Y
−Z
SRB-SP-0708

Aunque yo pensaba hacer algunos cálculos, la NASA me proporcionó todas las tolerancias sobre desviaciones de las secciones respecto de la redondez perfecta, a partir de las cuales traté de calcular cuánta sería la compresión resultante en los anillos tóricos, y dónde estaría localizada. Tal vez la fuga se produjese en los puntos de compresión mínima. Los números eran medidas tomadas según tres diámetros, separados 60 grados. Pero la coincidencia de tres diámetros no es garantía de que las piezas encajen; ni seis diámetros, ni ningún otro finito podría garantizarlo, tampoco.

Por ejemplo, se puede trazar una figura parecida a un triángulo redondeado en los vértices, en el cual tres diámetros separados 60 grados entre sí, tienen la misma longitud.

Recuerdo haber visto un truco así en un museo, en mis tiempos de chaval. Se trataba de una cremallera dentada que se movía con toda suavidad adelante y atrás, mientras engranaban en ella por la parte inferior varias ruedas dentadas de formas raras, no circulares, que giraban en torno a ejes bamboleantes. Aquel chisme parecía imposible, pero la razón de que funcionase era que las ruedas dentadas tenían formas tales, que mantenían diámetros constantes.

Por ese motivo, los números facilitados por la NASA no me servían de nada.

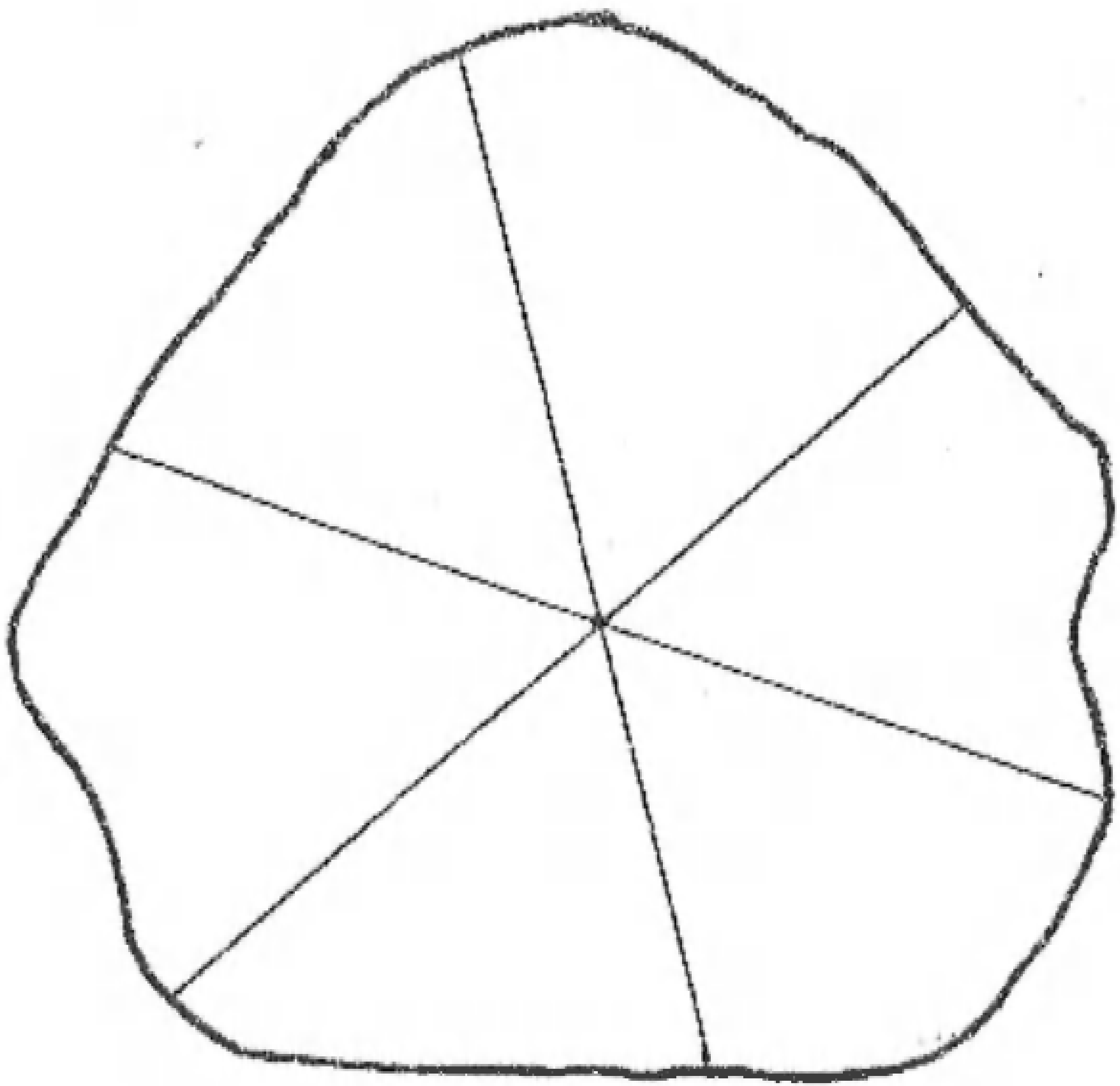


FIGURA 17. *Aunque todos los diámetros de esta figura son igual de largos, evidentemente no es redonda.*

¡Gracias!