Sobre la caracterización topológica de conjuntos ω-límite para flujos analíticos sobre superficies

2º Congreso de Jóvenes Investigadores

Sesión especial en Sistemas Dinámicos

José Ginés Espín Buendía

Departamento de Matemáticas, Universidad de Murcia

17 de septiembre de 2013

Resumen

Resumen

Poincaré (1854–1912)

Poincaré (1854–1912)

Teorema (Poincaré, 1885)

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una función analítica y $z(t) = (x(t), y(t))$ es una solución acotada del sistema $\dot{z} = f(z)$ que no «acaba» en un punto singular, entonces o bien $z(t)$ se aproxima a una solución periódica cuando el tiempo tiende a infinito o bien es ella misma una solución periódica.

Bendixson (1861–1935)

Teorema (Bendixson, 1901)

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una función ~~analítica~~ de clase C^1 y $z(t) = (x(t), y(t))$ es una solución acotada del sistema $\dot{z} = f(z)$ que no «acaba» en un punto singular, entonces o bien $z(t)$ se aproxima a una solución periódica cuando el tiempo tiende a infinito o bien es ella misma una solución periódica.

Flujos y sistemas de ecuaciones diferenciales

Flujos y sistemas de ecuaciones diferenciales

Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ una función suficientemente regular en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$;

Flujos y sistemas de ecuaciones diferenciales

Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ una función suficientemente regular en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$;

Para cada $p \in \Omega$

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z) \\ z(0) = p. \end{cases}$$

Flujos y sistemas de ecuaciones diferenciales

Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ una función suficientemente regular en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$;

Para cada $p \in \Omega$

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z) \\ z(0) = p. \end{cases} \quad \rightsquigarrow$$

Flujos y sistemas de ecuaciones diferenciales

Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ una función suficientemente regular en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$;

Para cada $p \in \Omega$

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z) \\ z(0) = p. \end{cases} \quad \rightsquigarrow$$

Solución maximal $\phi_p : I_p = (a_p, b_p) \to \mathbb{R}^2$

Flujos y sistemas de ecuaciones diferenciales

Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ una función suficientemente regular en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$;

Para cada $p \in \Omega$

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z) \\ z(0) = p. \end{cases} \quad \rightsquigarrow$$

Solución maximal $\phi_p : I_p = (a_p, b_p) \to \mathbb{R}^2$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \Lambda \subset \mathbb{R} \times \Omega & \to & \Omega \\ & (t, p) & \mapsto & \phi(t, p) := \phi_p(t) \end{array}$$

con $\Lambda = \{(t, p) : t \in I_p\}$ abierto de $\mathbb{R} \times \Omega$

- $\boxed{\phi(0, p) = p;}$
- $\boxed{\phi(s, \phi(t, p)) = \phi(s + t, p).}$

Flujos y sistemas de ecuaciones diferenciales

Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ una función suficientemente regular en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$;

Para cada $p \in \Omega$

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z) \\ z(0) = p. \end{cases} \rightsquigarrow$$

Solución maximal $\phi_p : I_p = (a_p, b_p) \to \mathbb{R}^2$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rccl} \phi : & \Lambda \subset \mathbb{R} \times \Omega & \to & \Omega \\ & (t,p) & \mapsto & \phi(t,p) := \phi_p(t) \end{array}$$

con $\Lambda = \{(t,p) : t \in I_p\}$ abierto de $\mathbb{R} \times \Omega$

- $\boxed{\phi(0,p) = p;}$
- $\boxed{\phi(s, \phi(t,p)) = \phi(s+t, p).}$

Flujos y sistemas de ecuaciones diferenciales

Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ una función suficientemente regular en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$;

Para cada $p \in \Omega$

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z) \\ z(0) = p. \end{cases} \quad \rightsquigarrow$$

Solución maximal $\phi_p : I_p = (a_p, b_p) \to \mathbb{R}^2$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \Lambda \subset \mathbb{R} \times \Omega & \to & \Omega \\ & (t,p) & \mapsto & \phi(t,p) := \phi_p(t) \end{array}$$

con $\Lambda = \{(t,p) : t \in I_p\}$ abierto de $\mathbb{R} \times \Omega$

(Si ϕ es derivable respecto a t)
$f(z) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(0,z)$

- $\boxed{\phi(0,p) = p;}$
- $\boxed{\phi(s, \phi(t,p)) = \phi(s+t, p).}$

Flujos y sistemas de ecuaciones diferenciales

Sea $f : \Omega \to \mathbb{R}^2$ una función suficientemente regular en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$;

Para cada $p \in \Omega$

$$\begin{cases} \dot{z} = f(z) \\ z(0) = p. \end{cases} \quad \rightsquigarrow$$

Solución maximal $\phi_p : I_p = (a_p, b_p) \to \mathbb{R}^2$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{llll} \phi : & \Lambda \subset \mathbb{R} \times \Omega & \to & \Omega \\ & (t, p) & \mapsto & \phi(t,p) := \phi_p(t) \end{array}$$

con $\Lambda = \{(t,p) : t \in I_p\}$ abierto de $\mathbb{R} \times \Omega$

- $\boxed{\phi(0,p) = p;}$
- $\boxed{\phi(s, \phi(t,p)) = \phi(s+t, p).}$

$\nwarrow$

(Si ϕ es derivable respecto a t)
$f(z) = \frac{\partial}{\partial t}\phi(0,z)$

Conjuntos límite

Definición (Conjuntos límite)

Sea ϕ un flujo sobre un espacio métrico X.

Conjuntos límite

Definición (Conjuntos límite)

Sea ϕ un flujo sobre un espacio métrico X.

- Dado un punto $p \in X$, la *órbita* del flujo que pasa por p es el conjunto $\Gamma_p := \phi_p(I_p) = \{\phi(t,p) : t \in I_p\}$.

Conjuntos límite

Definición (Conjuntos límite)

Sea ϕ un flujo sobre un espacio métrico X.

- Dado un punto $p \in X$, la *órbita* del flujo que pasa por p es el conjunto $\Gamma_p := \phi_p(I_p) = \{\phi(t,p) : t \in I_p\}$.
- El conjunto *ω-límite* de esa órbita es

$$\omega_\phi(p) := \{m \in X : \text{ existe una sucesión } t_n \to b_p \text{ tal que } \phi(t_n,p) \to m\}.$$

Conjuntos límite

Definición (Conjuntos límite)

Sea ϕ un flujo sobre un espacio métrico X.

- Dado un punto $p \in X$, la *órbita* del flujo que pasa por p es el conjunto $\Gamma_p := \phi_p(I_p) = \{\phi(t,p) : t \in I_p\}$.
- El conjunto *ω-límite* de esa órbita es

$$\omega_\phi(p) := \{m \in X : \text{ existe una sucesión } t_n \to b_p \text{ tal que } \phi(t_n, p) \to m\}.$$

Teorema de Poincaré-Bendixson clásico en $\mathbb{R}^2$

Si el ω-límite de una órbita acotada (i. e. contenida en un compacto $K \subset \mathbb{R}^2$) en un flujo de clase C^1 en el plano no contiene puntos singulares, entonces ese ω-límite se reduce a una órbita periódica.

Generalizaciones de Poincaré-Bendixson

Generalizaciones de Poincaré-Bendixson

- En los años sesenta O. Hájek extendió el teorema de Poincaré-Bendixson clásico a flujos continuos en el plano.

Generalizaciones de Poincaré-Bendixson

- En los años sesenta O. Hájek extendió el teorema de Poincaré-Bendixson clásico a flujos continuos en el plano.
- En 1986 C. Gutiérrez prueba que todo flujo continuo en el plano es topológicamente equivalente a uno de clase C^∞.

Generalizaciones de Poincaré-Bendixson

- En los años sesenta O. Hájek extendió el teorema de Poincaré-Bendixson clásico a flujos continuos en el plano.
- En 1986 C. Gutiérrez prueba que todo flujo continuo en el plano es topológicamente equivalente a uno de clase C^∞.
- En el plano, la teoría de flujos y la teoría de ecuaciones diferenciales son «esencialmente» los mismo.

Generalizaciones de Poincaré-Bendixson

- En los años sesenta O. Hájek extendió el teorema de Poincaré-Bendixson clásico a flujos continuos en el plano.
- En 1986 C. Gutiérrez prueba que todo flujo continuo en el plano es topológicamente equivalente a uno de clase C^∞.
- En el plano, la teoría de flujos y la teoría de ecuaciones diferenciales son «esencialmente» los mismo.
- En dimensiones mayores:

Generalizaciones de Poincaré-Bendixson

- En los años sesenta O. Hájek extendió el teorema de Poincaré-Bendixson clásico a flujos continuos en el plano.
- En 1986 C. Gutiérrez prueba que todo flujo continuo en el plano es topológicamente equivalente a uno de clase C^∞.
- En el plano, la teoría de flujos y la teoría de ecuaciones diferenciales son «esencialmente» los mismo.
- En dimensiones mayores:
  - En dimensión 4, hay contraejemplos.

W. C. Chewning, *A dynamical system on E^4 neither isomorphic nor equivalent to a differentiable system*, Bulletin of the American Mathematical Society **3** (1974), 150–153.

Generalizaciones de Poincaré-Bendixson

- En los años sesenta O. Hájek extendió el teorema de Poincaré-Bendixson clásico a flujos continuos en el plano.
- En 1986 C. Gutiérrez prueba que todo flujo continuo en el plano es topológicamente equivalente a uno de clase C^∞.
- En el plano, la teoría de flujos y la teoría de ecuaciones diferenciales son «esencialmente» los mismo.
- En dimensiones mayores:
  - En dimensión 4, hay contraejemplos.

W. C. Chewning, *A dynamical system on E^4 neither isomorphic nor equivalent to a differentiable system*, Bulletin of the American Mathematical Society **3** (1974), 150–153.

  - En dimensión 3, problema abierto.

Generalizaciones de Poincaré-Bendixson

Generalizaciones de Poincaré-Bendixson

Teorema (Vinograd,1952)

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ es el conjunto ω-límite de una órbita (acotada o no) en un cierto flujo continuo si, y sólo si, A es la frontera (en $\mathbb{R}^2$) de algún abierto conexo con complementario conexo.

Generalizaciones de Poincaré-Bendixson

Teorema (Vinograd,1952)

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ es el conjunto ω-límite de una órbita (acotada o no) en un cierto flujo continuo si, y sólo si, A es la frontera (en $\mathbb{R}^2$) de algún abierto conexo con complementario conexo.

- Los flujos continuos sobre abierto de $\mathbb{R}^2$ se pueden «extender» a flujos en todo $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ Conjuntos ω-límite también caracterizados en los abiertos del plano.

Generalizaciones de Poincaré-Bendixson

Teorema (Vinograd,1952)

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ es el conjunto ω-límite de una órbita (acotada o no) en un cierto flujo continuo si, y sólo si, A es la frontera (en $\mathbb{R}^2$) de algún abierto conexo con complementario conexo.

- Los flujos continuos sobre abierto de $\mathbb{R}^2$ se pueden «extender» a flujos en todo $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ Conjuntos ω-límite también caracterizados en los abiertos del plano.
- ω-límites caracterizados en todo el plano y en todos sus abiertos para todos los flujos de clase C^m con $0 \leq m \leq \infty$.

Generalizaciones de Poincaré-Bendixson

Teorema (Vinograd,1952)

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ es el conjunto ω-límite de una órbita (acotada o no) en un cierto flujo continuo si, y sólo si, A es la frontera (en $\mathbb{R}^2$) de algún abierto conexo con complementario conexo.

- Los flujos continuos sobre abierto de $\mathbb{R}^2$ se pueden «extender» a flujos en todo $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ Conjuntos ω-límite también caracterizados en los abiertos del plano.
- ω-límites caracterizados en todo el plano y en todos sus abiertos para todos los flujos de clase C^m con $0 \leq m \leq \infty$.
- PROBLEMA NATURAL: Volver a trabajar, como Poincaré, con flujos analíticos e investigar las propiedades de los ω-límite.

Resumen

DIFERENCIAS ENTRE FLUJOS $\mathbb{C}^{\infty}$ y $\mathbb{C}^{\omega}$:

DIFERENCIAS ENTRE FLUJOS $\mathbb{C}^\infty$ y $\mathbb{C}^\omega$:

1. Los flujos analíticos no son en general topológicamente equivalentes a los continuos.

DIFERENCIAS ENTRE FLUJOS $\mathbb{C}^{\infty}$ y $\mathbb{C}^{\omega}$:

1. Los flujos analíticos no son en general topológicamente equivalentes a los continuos.
2. Los flujos analíticos sobre abiertos del plano no se extienden a todo el plano.

DIFERENCIAS ENTRE FLUJOS $\mathbb{C}^{\infty}$ y $\mathbb{C}^{\omega}$:

1. Los flujos analíticos no son en general topológicamente equivalentes a los continuos.
2. Los flujos analíticos sobre abiertos del plano no se extienden a todo el plano.

SURGEN DOS PREGUNTAS NATURALES

DIFERENCIAS ENTRE FLUJOS $\mathbb{C}^{\infty}$ y $\mathbb{C}^{\omega}$:

1. Los flujos analíticos no son en general topológicamente equivalentes a los continuos.
2. Los flujos analíticos sobre abiertos del plano no se extienden a todo el plano.

SURGEN DOS PREGUNTAS NATURALES

1. Dado un flujo analítico en el plano (o en un abierto), ¿podemos dar una caracterización intrínseca de los ω-límite?

DIFERENCIAS ENTRE FLUJOS $\mathbb{C}^{\infty}$ y $\mathbb{C}^{\omega}$:

1. Los flujos analíticos no son en general topológicamente equivalentes a los continuos.
2. Los flujos analíticos sobre abiertos del plano no se extienden a todo el plano.

SURGEN DOS PREGUNTAS NATURALES

1. Dado un flujo analítico en el plano (o en un abierto), ¿podemos dar una caracterización intrínseca de los ω-límite?
2. ¿Obtenemos una caracterización diferente en los abiertos del plano?

La caracterización en $\mathbb{R}^2$

En

V. Jiménez López y J. Llibre, *A topological characterization of the ω-limit sets for analytic flows on the plane, the sphere and the projective plane*, Advances in Mathematics **216** (2007), 667–710.

se consigue caracterizar intrínsecamente los ω-límite en el plano.

La caracterización en $\mathbb{R}^2$

En

V. Jiménez López y J. Llibre, *A topological characterization of the ω-limit sets for analytic flows on the plane, the sphere and the projective plane*, Advances in Mathematics **216** (2007), 667–710.

se consigue caracterizar intrínsecamente los ω-límite en el plano.

«Esencialmente», los ω-límites son uniones de circunferencias.

La caracterización en $\mathbb{R}^2$

En

V. Jiménez López y J. Llibre, *A topological characterization of the ω-limit sets for analytic flows on the plane, the sphere and the projective plane*, Advances in Mathematics **216** (2007), 667–710.

se consigue caracterizar intrínsecamente los ω-límite en el plano.

«Esencialmente», los ω-límites son uniones de circunferencias.

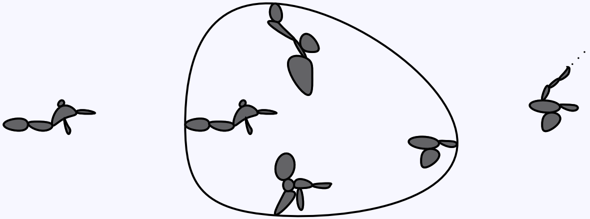


Figura : Ejemplos de posibles ω-límites

La caracterización en $\mathbb{R}^2$

En

V. Jiménez López y J. Llibre, *A topological characterization of the ω-limit sets for analytic flows on the plane, the sphere and the projective plane*, Advances in Mathematics **216** (2007), 667–710.

se consigue caracterizar intrínsecamente los ω-límite en el plano.

«Esencialmente», los ω-límites son uniones de circunferencias.

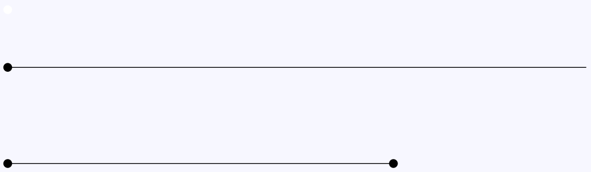


Figura : Ejemplos de conjuntos que no son ω-límites

Resumen

Un lema técnico falso

- En el artículo de Llibre y Jiménez también se enuncia una caracterización de los conjuntos ω-límite en abiertos propios del plano (o equivalentemente de la esfera).

Un lema técnico falso

- En el artículo de Llibre y Jiménez también se enuncia una caracterización de los conjuntos ω-límite en abiertos propios del plano (o equivalentemente de la esfera).
- La prueba que allí se da se basa en un lema técnico que hemos demostrado que es falso.

Un lema técnico falso

- En el artículo de Llibre y Jiménez también se enuncia una caracterización de los conjuntos ω-límite en abiertos propios del plano (o equivalentemente de la esfera).
- La prueba que allí se da se basa en un lema técnico que hemos demostrado que es falso.

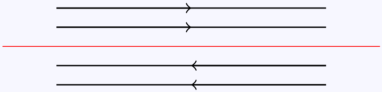


Figura : Lema técnico

Un lema técnico falso

- En el artículo de Llibre y Jiménez también se enuncia una caracterización de los conjuntos ω-límite en abiertos propios del plano (o equivalentemente de la esfera).
- La prueba que allí se da se basa en un lema técnico que hemos demostrado que es falso.

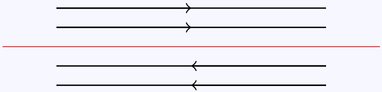


Figura : Lema técnico

- Ese lema técnico también se usa en la caracterización de los ω-límite en todo $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{P}^2$. Pero aquí el lema y las caracterizaciones **sí** son correctas.

Un lema técnico falso

- En el artículo de Llibre y Jiménez también se enuncia una caracterización de los conjuntos ω-límite en abiertos propios del plano (o equivalentemente de la esfera).
- La prueba que allí se da se basa en un lema técnico que hemos demostrado que es falso.

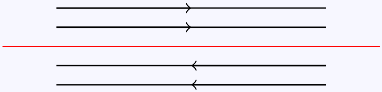


Figura : Lema técnico

- Ese lema técnico también se usa en la caracterización de los ω-límite en todo $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{P}^2$. Pero aquí el lema y las caracterizaciones **sí** son correctas.
- Sin embargo, hemos encontrado contraejemplos tanto a ese lema como al enunciado de la caracterización sobre abiertos.

Contraejemplos

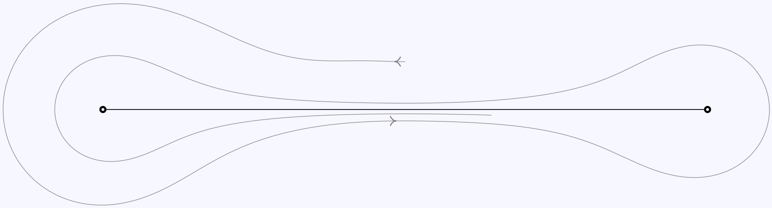


Figura : Contraejemplo en el plano menos dos puntos.

Contraejemplos

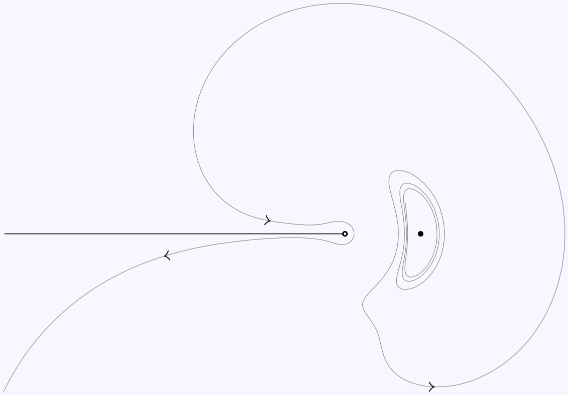


Figura : Contraejemplo no acotado en el plano menos un punto.

Contraejemplos

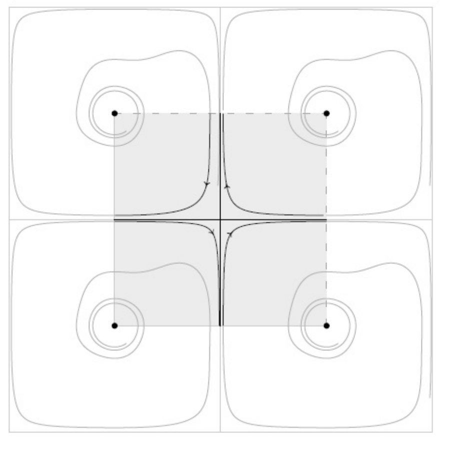


Figura : Contraejemplo en el toro.

Resumen

Quedan por tanto abiertos los siguientes problemas

Quedan por tanto abiertos los siguientes problemas

Problema abierto

Corregir la caracterización topológica de los conjuntos ω-límite en abiertos de la esfera y el plano proyectivo.

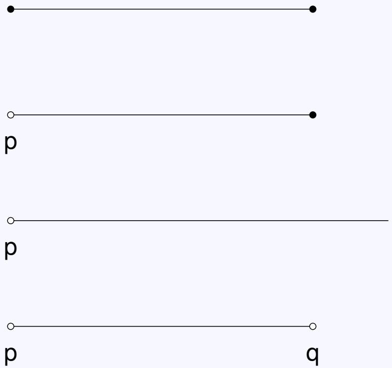
Quedan por tanto abiertos los siguientes problemas

Problema abierto

Corregir la caracterización topológica de los conjuntos ω-límite en abiertos de la esfera y el plano proyectivo.

Problema abierto

Caracterizar los ω-limites en superficies en general, y en particular el toro, la botella de Klein y sus abiertos.



En $\mathbb{R}^2$: C^∞ C^ω

En $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$: C^∞ C^ω

En $\mathbb{R}^2$: C^∞ C^ω
En $\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}$: C^ω

En $\mathbb{R}^2$: C^∞ C^ω
En $\mathbb{R}^2 \setminus \{p, q\}$: C^ω

Figura : Ejemplos ilustrativos