$\mathcal{D}$-módulos hipergeométricos y familias de Dwork

Alberto Castaño Domínguez

Instituto de Matemáticas de la Universidad de Sevilla (IMUS)
Universidad de Sevilla

2º Congreso de Jóvenes Investigadores de la RSME

Sevilla, 17 de septiembre de 2013

Familias de Dwork

Fijemos:

Un entero positivo n.

$\underline{w} = (w_0, \dots, w_n) \in \mathbb{Z}_{>0}^{n+1}$ tal que $\gcd(w_0, \dots, w_n) = 1$; $d_n = \sum w_i$

Un cuerpo de característica cero K.

Familias de Dwork

Fijemos:

Un entero positivo n.

$\underline{w} = (w_0, \ldots, w_n) \in \mathbb{Z}_{>0}^{n+1}$ tal que $\gcd(w_0, \ldots, w_n) = 1$; $d_n = \sum w_i$

Un cuerpo de característica cero K.

$$\mathcal{X}_{n,\underline{w}} : x_0^{d_n} + \ldots + x_n^{d_n}$$

Familias de Dwork

Fijemos:

Un entero positivo n.

$\underline{w} = (w_0, \ldots, w_n) \in \mathbb{Z}_{>0}^{n+1}$ tal que $\gcd(w_0, \ldots, w_n) = 1$; $d_n = \sum w_i$

Un cuerpo de característica cero K.

$$\mathcal{X}_{n,\underline{w}} : x_0^{d_n} + \ldots + x_n^{d_n} - \lambda x_0^{w_0} \cdot \ldots \cdot x_n^{w_n} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^1$$

Familias de Dwork

Fijemos:

Un entero positivo n.

$\underline{w} = (w_0, \ldots, w_n) \in \mathbb{Z}_{>0}^{n+1}$ tal que $\gcd(w_0, \ldots, w_n) = 1$; $d_n = \sum w_i$

Un cuerpo de característica cero K.

$$\mathcal{X}_{n,\underline{w}} : x_0^{d_n} + \ldots + x_n^{d_n} - \lambda x_0^{w_0} \cdot \ldots \cdot x_n^{w_n} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^1$$

$$G := \left\{ (\zeta_0, \ldots, \zeta_n) \in \mu_{d_n}^{n+1} | \prod_i \zeta^{w_i} = 1 \right\} / \Delta.$$

Familias de Dwork

Fijemos:

Un entero positivo n.

$\underline{w} = (w_0, \ldots, w_n) \in \mathbb{Z}_{>0}^{n+1}$ tal que $\gcd(w_0, \ldots, w_n) = 1$; $d_n = \sum w_i$

Un cuerpo de característica cero K.

$$\mathcal{X}_{n,\underline{w}} : x_0^{d_n} + \ldots + x_n^{d_n} - \lambda x_0^{w_0} \cdot \ldots \cdot x_n^{w_n} \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{A}^1$$

$$G := \left\{ (\zeta_0, \ldots, \zeta_n) \in \mu_{d_n}^{n+1} | \prod_i \zeta^{w_i} = 1 \right\} / \Delta.$$

$\mathcal{X}_{n,\underline{w}}/G \cong \bar{\mathcal{Y}}_{n,\underline{w}}$

$$\mathcal{Y}_{n,\underline{w}} : \left\{ \begin{array}{l} x_0^{w_0} \cdot \ldots \cdot x_n^{w_n} = 1 \\ x_0 + \ldots + x_n = \lambda \end{array} \right\}$$

$\mathcal{D}$-módulos algebraicos complejos

Trabajaremos en la categoría derivada de complejos cuyas cohomologías son ciertos $\mathcal{D}_X$-módulos a la izquierda, $D_*(\mathcal{D}_X)$.

$\mathcal{D}$-módulos algebraicos complejos

Trabajaremos en la categoría derivada de complejos cuyas cohomologías son ciertos $\mathcal{D}_X$-módulos a la izquierda, $D_*(\mathcal{D}_X)$.

$\mathcal{D}_X$ es el haz de operadores diferenciales de orden finito con coeficientes polinomiales en un esquema liso X.

$\mathcal{D}$-módulos algebraicos complejos

Trabajaremos en la categoría derivada de complejos cuyas cohomologías son ciertos $\mathcal{D}_X$-módulos a la izquierda, $D_*(\mathcal{D}_X)$.

$\mathcal{D}_X$ es el haz de operadores diferenciales de orden finito con coeficientes polinomiales en un esquema liso X.

Localmente, con variables $x_1, \ldots, x_n$, es el álgebra de Weyl

$$A_n(\mathbb{C}) := \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]\langle \partial_1, \ldots, \partial_n \rangle,$$

donde todo conmuta exceptuando la relación $x_i \partial_i = \partial_i x_i - 1$.

$\mathcal{D}$-módulos hipergeométricos sobre $\mathbb{G}_m$.

$\alpha_i, \beta_j, \gamma$ números complejos, para $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$.

$D_\lambda = \lambda \partial_\lambda \in \mathcal{D}_{\mathbb{G}_m}$.

$\mathcal{D}$-módulos hipergeométricos sobre $\mathbb{G}_m$.

$\alpha_i, \beta_j, \gamma$ números complejos, para $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$.

$D_\lambda = \lambda \partial_\lambda \in \mathcal{D}_{\mathbb{G}_m}$.

$$\mathrm{Hyp}_\gamma(\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m; \lambda) := \gamma \prod_i (D_\lambda - \alpha_i) - \lambda \prod_j (D_\lambda - \beta_j)$$

$\mathcal{D}$-módulos hipergeométricos sobre $\mathbb{G}_m$.

$\alpha_i, \beta_j, \gamma$ números complejos, para $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$.

$D_\lambda = \lambda \partial_\lambda \in \mathcal{D}_{\mathbb{G}_m}$.

$$\mathrm{Hyp}_\gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m; \lambda) := \gamma \prod_i (D_\lambda - \alpha_i) - \lambda \prod_j (D_\lambda - \beta_j)$$

$$\mathcal{H}_\gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m) := \mathcal{D}_{\mathbb{G}_m} / \mathcal{D}_{\mathbb{G}_m}(\mathrm{Hyp}_\gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m; \lambda))$$

$\mathcal{D}$-módulos hipergeométricos sobre $\mathbb{G}_m$.

$\alpha_i, \beta_j, \gamma$ números complejos, para $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, m$.

$D_\lambda = \lambda\partial_\lambda \in \mathcal{D}_{\mathbb{G}_m}$.

$$\mathrm{Hyp}_\gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m; \lambda) := \gamma \prod_i (D_\lambda - \alpha_i) - \lambda \prod_j (D_\lambda - \beta_j)$$

$$\mathcal{H}_\gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m) := \mathcal{D}_{\mathbb{G}_m} / \mathcal{D}_{\mathbb{G}_m}(\mathrm{Hyp}_\gamma(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m; \lambda))$$

Es un $\mathcal{D}$-módulo holónomo, y cuando $n = m$ es regular y viene "caracterizado" por que su característica de Euler-Poincaré sea -1, su rango, el único punto de $\mathbb{G}_m$ en donde tiene una singularidad regular y los valores propios de sus monodromías locales en cero e infinito.

¿He oído monodromía?

Todo $\mathcal{D}$-módulo regular $\mathcal{M}$ tiene soluciones multivaloradas en un disco puntuado con centro en sus singularidades regulares.

¿He oído monodromía?

Todo $\mathcal{D}$-módulo regular $\mathcal{M}$ tiene soluciones multivaloradas en un disco puntuado con centro en sus singularidades regulares.

Son realmente funciones definidas en $\mathbb{C}$ visto como recubridor universal de $\mathbb{G}_m$ mediante el morfismo $\omega \mapsto e^{2\pi i \omega}$.

¿He oído monodromía?

Todo $\mathcal{D}$-módulo regular $\mathcal{M}$ tiene soluciones multivaloradas en un disco puntuado con centro en sus singularidades regulares.

Son realmente funciones definidas en $\mathbb{C}$ visto como recubridor universal de $\mathbb{G}_m$ mediante el morfismo $\omega \mapsto e^{2\pi i \omega}$.

El operador monodromía es el resultado de trasladar una unidad en el recubridor y proyectar sobre $\mathbb{G}_m$.

¿He oído monodromía?

Todo $\mathcal{D}$-módulo regular $\mathcal{M}$ tiene soluciones multivaloradas en un disco puntuado con centro en sus singularidades regulares.

Son realmente funciones definidas en $\mathbb{C}$ visto como recubridor universal de $\mathbb{G}_m$ mediante el morfismo $\omega \mapsto e^{2\pi i \omega}$.

El operador monodromía es el resultado de trasladar una unidad en el recubridor y proyectar sobre $\mathbb{G}_m$.

Viene unívocamente determinado por $\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}} \mathbb{C}((\lambda))$, siendo λ un parámetro local en el punto λ_0 y $\mathbb{C}((\lambda)) = \left(\widehat{\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m,\lambda_0}}\right)[\lambda^{-1}]$. Sus soluciones formales meromorfas se definen como

$$\mathrm{Solf}_{\lambda_0} := \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}_{\mathbb{G}_m}}\left(\mathcal{M} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}} \mathbb{C}((\lambda)), \mathbb{C}((\lambda))\right)$$

¿Y eso cómo se traduce en $\mathcal{D}$-módulos?

Lo que queremos hallar es $\bar{K}_n := p_{n,+}\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_n}$.

¿Y eso cómo se traduce en $\mathcal{D}$-módulos?

Lo que queremos hallar es $\bar{K}_n := p_{n,+}\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_n}$.

$$\mathcal{Y}_n : x_1^{w_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{w_n}(\lambda - x_1 - \ldots - x_n)^{w_0} = 1 \subset \mathbb{G}_m^n \times \mathbb{A}^1.$$

¿Y eso cómo se traduce en $\mathcal{D}$-módulos?

Lo que queremos hallar es $\bar{K}_n := p_{n,+}\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_n}$.

$$\mathcal{Y}_n : x_1^{w_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{w_n}(\lambda - x_1 - \ldots - x_n)^{w_0} = 1 \subset \mathbb{G}_m^n \times \mathbb{A}^1.$$

$$\mathcal{Z}_n : x_1^{w_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{w_n} \cdot (1 - x_1 - \ldots - x_n)^{w_0} = \lambda \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1.$$

¿Y eso cómo se traduce en $\mathcal{D}$-módulos?

Lo que queremos hallar es $\bar{K}_n := p_{n,+}\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_n}$.

$$\mathcal{Y}_n : x_1^{w_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{w_n}(\lambda - x_1 - \ldots - x_n)^{w_0} = 1 \subset \mathbb{G}_m^n \times \mathbb{A}^1.$$

$$\mathcal{Z}_n : x_1^{w_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{w_n} \cdot (1 - x_1 - \ldots - x_n)^{w_0} = \lambda \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Y}_n - p_n^{-1}(0) \arrow[r, "\tilde{\alpha}_n"] \arrow[d, "p_n"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{Z}_n - p_n^{-1}(0) \arrow[d, "p_n"] \\
\mathbb{G}_m \arrow[r, "\iota_n"] & \mathbb{G}_m
\end{tikzcd},$$

¿Y eso cómo se traduce en $\mathcal{D}$-módulos?

Lo que queremos hallar es $\bar{K}_n := p_{n,+}\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_n}$.

$$\mathcal{Y}_n : x_1^{w_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{w_n}(\lambda - x_1 - \ldots - x_n)^{w_0} = 1 \subset \mathbb{G}_m^n \times \mathbb{A}^1.$$

$$\mathcal{Z}_n : x_1^{w_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{w_n} \cdot (1 - x_1 - \ldots - x_n)^{w_0} = \lambda \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Y}_n - p_n^{-1}(0) \arrow[r, "\tilde{\alpha}_n"] \arrow[d, "p_n"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{Z}_n - p_n^{-1}(0) , \arrow[d, "p_n"] \\
\mathbb{G}_m \arrow[r, "\iota_n"] & \mathbb{G}_m
\end{tikzcd}$$

donde $\tilde{\alpha}_n(\underline{x}, \lambda) = \left((x_1/\lambda, \ldots, x_n/\lambda), \lambda^{-d_n}\right)$ e $\iota_n(z) = z^{-d_n}$.

¿Y eso cómo se traduce en $\mathcal{D}$-módulos?

Lo que queremos hallar es $\bar{K}_n := p_{n,+}\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_n}$.

$$\mathcal{Y}_n : x_1^{w_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{w_n}(\lambda - x_1 - \ldots - x_n)^{w_0} = 1 \subset \mathbb{G}_m^n \times \mathbb{A}^1.$$

$$\mathcal{Z}_n : x_1^{w_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{w_n} \cdot (1 - x_1 - \ldots - x_n)^{w_0} = \lambda \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Y}_n - p_n^{-1}(0) \arrow[r, "\tilde{\alpha}_n"] \arrow[d, "p_n"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{Z}_n - p_n^{-1}(0) \arrow[d, "p_n"] \\
\mathbb{G}_m \arrow[r, "\iota_n"] & \mathbb{G}_m
\end{tikzcd},$$

donde $\tilde{\alpha}_n(\underline{x}, \lambda) = \left((x_1/\lambda, \ldots, x_n/\lambda), \lambda^{-d_n}\right)$ e $\iota_n(z) = z^{-d_n}$.
Alternativamente, si $\lambda_n : Z_n \longrightarrow \mathbb{G}_m$ viene dada por
$\lambda_n(\underline{x}) = x_1^{w_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{w_n} \cdot (1 - x_1 - \ldots - x_n)^{w_0}$,

¿Y eso cómo se traduce en $\mathcal{D}$-módulos?

Lo que queremos hallar es $\bar{K}_n := p_{n,+}\mathcal{O}_{\mathcal{Y}_n}$.

$$\mathcal{Y}_n : x_1^{w_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{w_n}(\lambda - x_1 - \ldots - x_n)^{w_0} = 1 \subset \mathbb{G}_m^n \times \mathbb{A}^1.$$

$$\mathcal{Z}_n : x_1^{w_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{w_n} \cdot (1 - x_1 - \ldots - x_n)^{w_0} = \lambda \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^1.$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Y}_n - p_n^{-1}(0) \arrow[r, "\tilde{\alpha}_n"] \arrow[d, "p_n"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \mathcal{Z}_n - p_n^{-1}(0) \arrow[d, "p_n"] \\
\mathbb{G}_m \arrow[r, "\iota_n"] & \mathbb{G}_m
\end{tikzcd},$$

donde $\tilde{\alpha}_n(\underline{x}, \lambda) = \left((x_1/\lambda, \ldots, x_n/\lambda), \lambda^{-d_n}\right)$ e $\iota_n(z) = z^{-d_n}$.
Alternativamente, si $\lambda_n : Z_n \longrightarrow \mathbb{G}_m$ viene dada por
$\lambda_n(\underline{x}) = x_1^{w_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{w_n} \cdot (1 - x_1 - \ldots - x_n)^{w_0}$, $\bar{K}_{n|\mathbb{G}_m} \cong \iota_n^+ K_n := \iota_n^+ \lambda_{n,+}\mathcal{O}_{Z_n}$.

Otro cuadrado cartesiano

$$\begin{tikzcd}
Z_n - \{x_n = 1\} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "(\pi_n,\lambda_n)"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Z_{n-1} \times (\mathbb{G}_m - \{1\}) \arrow[d, "\pi_n \times \lambda_{n-1}"] \\
(\mathbb{G}_m - \{1\}) \times \mathbb{G}_m \arrow[r, "\phi_n"] & (\mathbb{G}_m - \{1\}) \times \mathbb{G}_m
\end{tikzcd},$$

Otro cuadrado cartesiano

$$
\begin{tikzcd}
Z_n - \{x_n = 1\} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "(\pi_n, \lambda_n)"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Z_{n-1} \times (\mathbb{G}_m - \{1\}) \arrow[d, "\pi_n \times \lambda_{n-1}"] \\
(\mathbb{G}_m - \{1\}) \times \mathbb{G}_m \arrow[r, "\phi_n"] & (\mathbb{G}_m - \{1\}) \times \mathbb{G}_m
\end{tikzcd} ,
$$

Las líneas horizontales son los isomorfismos

$$
\begin{array}{rrcl}
\phi_n : & (\mathbb{G}_m - \{1\}) \times \mathbb{G}_m & \longrightarrow & (\mathbb{G}_m - \{1\}) \times \mathbb{G}_m \\
 & (z, \lambda) & \longmapsto & (z, \lambda / (z^{w_n}(1-z)^{d_{n-1}}))
\end{array}
$$

y

$$
\begin{array}{rrcl}
\psi_n : & Z_n - \{x_n = 1\} & \longrightarrow & Z_{n-1} \times (\mathbb{G}_m - \{1\}) \\
 & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & (x_1/(1-x_n), \cdots, x_{n-1}/(1-x_n), x_n)
\end{array}
$$

Un triángulo amoroso

$$T_n = \{\underline{x} \in \mathbb{G}_m^n : x_1 + \ldots + x_{n-1} \neq 0\};\ M_n := \lambda_{n|T_n,+}\mathcal{O}_{T_n}.$$

Un triángulo amoroso

$T_n = \{\underline{x} \in \mathbb{G}_m^n : x_1 + \ldots + x_{n-1} \neq 0\}$; $M_n := \lambda_{n|T_n,+}\mathcal{O}_{T_n}$.

M_n nos dice qué es lo que perdemos haciendo inducción en $(\mathbb{G}_m - \{1\}) \times \mathbb{G}_m$ en lugar de en $\mathbb{G}_m^2$. Con esto podemos formar el triángulo

$$K_n \longrightarrow \pi_{2,+}(\pi_2\phi_n)^+ K_{n-1} \longrightarrow M_n.$$

El teorema (I)

Teorema

K_n cumple que $\mathcal{H}^i(K_n) = 0$ if $i \notin \{-(n-1), \dots, 0\}$, $\mathcal{H}^i(K_n) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}^{\binom{n}{i+n-1}}$ para todo $-(n-1) \leq i \leq -1$, y en grado 0 se tiene la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}_n \longrightarrow \mathcal{H}^0(K_n) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}^n \longrightarrow 0,$$

siendo $\mathcal{G}_n$ un $\mathcal{D}$-módulo cuya semisimplificación es

$$\mathcal{G}_n^{ss} := \bigoplus_{\alpha \in A_n^*} \mathcal{K}_\alpha \oplus \mathcal{F}_n.$$

El teorema (y II)

Teorema

En la diapositiva anterior, $\mathcal{K}_\alpha$ *es el* $\mathcal{D}$*-módulo de Kummer* $\mathcal{D}_{\mathbb{G}_m}/(D_\lambda - \alpha)$*,* A_n^* *es el conjunto*

$$\left\{\frac{1}{w_0}, \ldots, \frac{w_0}{w_0}, \ldots, \frac{1}{w_n}, \ldots, \frac{w_n}{w_n}\right\} \cap \left\{\frac{1}{d_n}, \ldots, \frac{d_n}{d_n}\right\} - \{1\},$$

y $\mathcal{F}_n$ *es el* $\mathcal{D}$*-módulo hipergeométrico*

$$\mathcal{H}_{\gamma_n^{-1}}\left(\text{cancel}\left(\frac{1}{w_0}, \ldots, \frac{w_0}{w_0}, \ldots, \frac{1}{w_n}, \ldots, \frac{w_n}{w_n}\right); \text{cancel}\left(\frac{1}{d_n}, \ldots, \frac{d_n}{d_n}\right)\right),$$

siendo

$$\gamma_n = \prod_{i=0}^{n} w_i^{w_i} / d_n^{d_n}.$$

¿Cómo probarlo?

Usamos la caracterización de un $\mathcal{D}$-módulo hipergeométrico antes mencionada.

Para hallar la parte $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}$-libre de K_n, el rango de $\mathcal{G}_n$ y el valor de γ_n usamos la inducción, y el resto de propiedades se calculan directamente. Lo más difícil es hallar los autovalores de la monodromía en el origen.

¿Cómo probarlo?

Usamos la caracterización de un $\mathcal{D}$-módulo hipergeométrico antes mencionada.

Para hallar la parte $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m}$-libre de K_n, el rango de $\mathcal{G}_n$ y el valor de γ_n usamos la inducción, y el resto de propiedades se calculan directamente. Lo más difícil es hallar los autovalores de la monodromía en el origen.

$$i^+ j_{!+} j^+ \mathcal{H}^0(K_n) \cong \mathbb{C}^{\dim \mathrm{Solf}_0\left(\mathcal{H}^0(K_n)\right)}$$

$$\mathcal{H}^0\left(i^+\mathcal{H}^0(K_n)\right) \cong \mathrm{H}_s^{n-2}(\bar{A})$$

$\mathcal{D}$-módulos p-ádicos sobreholónomos

Muy superficialmente, son módulos sobre el haz de operadores diferenciales de orden infinito y coeficientes sobreconvergentes, que además satisfagan cierta condición de sobreconvergencia en los símbolos de las derivadas.

$\mathcal{D}$-módulos p-ádicos sobreholónomos

Muy superficialmente, son módulos sobre el haz de operadores diferenciales de orden infinito y coeficientes sobreconvergentes, que además satisfagan cierta condición de sobreconvergencia en los símbolos de las derivadas.

Desde hace ya bastantes años, el trabajo de muchos matemáticos (Berthelot, Mebkhout, Narváez Macarro, Christol, Arabia, Caro, etc.) ha dado lugar a que hoy en día sepamos que es la categoría adecuada en la que trabajar.

Gracias

Figura: Una variedad singular.