Aproximaciones celulares de espacios clasificadores de grupos de Lie compactos en $(B\mathbb{Z}/p^\infty \times B\mathbb{Z}/p^m)$-homotopía

Alberto Gavira Romero

Universitat Autònoma de Barcelona

Encuentro de Jovenes Investigadores de la RSME
Sevilla
19 de Septimebre de 2013

Objetivo

Sea p un número primo. Nuestro objetivo es describir $CW_A(BG_p^\wedge)$, donde G es un grupo de Lie compacto y $A = B\mathbb{Z}/p^m$ o $B\mathbb{Z}/p^\infty \times B\mathbb{Z}/p^m$.

Índice

1. A-homotopía
2. p-completación de Bousfield-Kan
3. Celularización de $BG_p^\wedge$
   - Caso: G es un grupo finito
   - Caso: G un grupo de Lie compacto y conexo
4. Preguntas abiertas

Índice

1. A-homotopía
2. p-completación de Bousfield-Kan
3. Celularización de $BG_p^\wedge$
   - Caso: G es un grupo finito
   - Caso: G un grupo de Lie compacto y conexo
4. Preguntas abiertas

Grupos de A-homotopía

Dado un espacio punteado X, se definen los **grupos de homotopía** de X como:

$$\pi_n(X) := [S^n, X]_* = [\Sigma^n S^0, X]_*$$

Grupos de A-homotopía

[Far96] Sea A un espacio punteado.

Dado un espacio punteado X, se definen los **grupos de A-homotopía** de X como:

$$\pi_n(X; A) := [\Sigma^n A, X]_*$$

[Far96] E. Dror-Farjoun, *Cellular spaces, null spaces and homotopy localization*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1622. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

Grupos de A-homotopía

[Far96] Sea A un espacio punteado.

Dado un espacio punteado X, se definen los **grupos de A-homotopía** de X como:

$$\pi_n(X;A) := [\Sigma^n A, X]_* = \pi_n \mathrm{map}_*(A, X)$$

[Far96] E. Dror-Farjoun, *Cellular spaces, null spaces and homotopy localization*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1622. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

Grupos de A-homotopía

[Far96] Sea A un espacio punteado.

Dado un espacio punteado X, se definen los **grupos de A-homotopía** de X como:

$$\pi_n(X; A) := [\Sigma^n A, X]_* = \pi_n \mathrm{map}_*(A, X)$$

Una aplicación $f : X \to Y$ es una **equivalencia** (débil) si induce un isomorfismo en grupos de homotopía.

[Far96] E. Dror-Farjoun, *Cellular spaces, null spaces and homotopy localization*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1622. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

Grupos de A-homotopía

[Far96] Sea A un espacio punteado.

Dado un espacio punteado X, se definen los **grupos de A-homotopía** de X como:

$$\pi_n(X; A) := [\Sigma^n A, X]_* = \pi_n \mathrm{map}_*(A, X)$$

Una aplicación $f : X \to Y$ es una A-**equivalencia** si induce un isomorfismo en grupos de A-homotopía

[Far96] E. Dror-Farjoun, *Cellular spaces, null spaces and homotopy localization*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1622. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

Grupos de A-homotopía

[Far96] Sea A un espacio punteado.

Dado un espacio punteado X, se definen los **grupos de A-homotopía** de X como:

$$\pi_n(X; A) := [\Sigma^n A, X]_* = \pi_n \mathrm{map}_*(A, X)$$

Una aplicación $f : X \to Y$ es una A-**equivalencia** si induce un isomorfismo en grupos de A-homotopía, i.e.,

$$f_* : \mathrm{map}_*(A, X) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{map}_*(A.Y)$$

[Far96] E. Dror-Farjoun, *Cellular spaces, null spaces and homotopy localization*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1622. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

Grupos de A-homotopía

[Far96] Sea A un espacio punteado.

Dado un espacio punteado X, se definen los **grupos de A-homotopía** de X como:

$$\pi_n(X; A) := [\Sigma^n A, X]_* = \pi_n \mathrm{map}_*(A, X)$$

Una aplicación $f : X \to Y$ es una A-**equivalencia** si induce un isomorfismo en grupos de A-homotopía, i.e.,

$$f_* : \mathrm{map}_*(A, X) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{map}_*(A.Y)$$

Por ejemplo:

[Far96] E. Dror-Farjoun, *Cellular spaces, null spaces and homotopy localization*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1622. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

Grupos de A-homotopía

[Far96] Sea A un espacio punteado.

Dado un espacio punteado X, se definen los **grupos de A-homotopía** de X como:

$$\pi_n(X; A) := [\Sigma^n A, X]_* = \pi_n \mathrm{map}_*(A, X)$$

Una aplicación $f : X \to Y$ es una A-**equivalencia** si induce un isomorfismo en grupos de A-homotopía, i.e.,

$$f_* : \mathrm{map}_*(A, X) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{map}_*(A.Y)$$

Por ejemplo:

- La teoría de S^0-homotopía es la teoría de homotopía clásica.

[Far96] E. Dror-Farjoun, *Cellular spaces, null spaces and homotopy localization*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1622. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

Espacios A-celulares

La noción clásica de CW-complejo es sustituida por un espacio A-celular,

Espacios A-celulares

La noción clásica de CW-complejo es sustituida por un espacio A-celular, esto es,

Definición ([Far96])

Decimos que un espacio punteado X es A-**celular** si se puede construir mediante iterados colímites homotópicos punteados.

[Far96] E. Dror-Farjoun, *Cellular spaces, null spaces and homotopy localization*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1622. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

Espacios A-celulares

La noción clásica de CW-complejo es sustituida por un espacio A-celular, esto es,

Definición ([Far96])

Decimos que un espacio punteado X es A-**celular** si se puede construir mediante iterados colímites homotópicos punteados.

Por ejemplo:

- Los espacios S^n-celulares son los CW-complejos $(n-1)$-conexos.

[Far96] E. Dror-Farjoun, *Cellular spaces, null spaces and homotopy localization*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1622. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

El funtor CW_A

Teorema ([Far96])

Existe un funtor aumentado e idempotente

$$CW_A : \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Top}_*$$

(donde aumentado significa que existe una transformación natural $c : CW_A \to Id$, e idempotente que $CW_A(CW_A(X)) \simeq CW_A(X)$)

[Far96] E. Dror-Farjoun, *Cellular spaces, null spaces and homotopy localization*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1622. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

El funtor CW_A

Teorema ([Far96])

Existe un funtor aumentado e idempotente

$$CW_A : \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Top}_*$$

(donde aumentado significa que existe una transformación natural $c : CW_A \to Id$, e idempotente que $CW_A(CW_A(X)) \simeq CW_A(X)$) tal que $CW_A(X)$ es A-celular y la aplicación aumentación $c_X : CW_A(X) \to X$ es una A-equivalencia.

[Far96] E. Dror-Farjoun, *Cellular spaces, null spaces and homotopy localization*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1622. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

El funtor CW_A

Teorema ([Far96])

Existe un funtor aumentado e idempotente

$$CW_A : \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Top}_*$$

(donde aumentado significa que existe una transformación natural $c : CW_A \to Id$, e idempotente que $CW_A(CW_A(X)) \simeq CW_A(X)$) tal que $CW_A(X)$ es A-celular y la aplicación aumentación $c_X : CW_A(X) \to X$ es una A-equivalencia.
$CW_A(X)$ es llamado la A-**celularización** de X.

[Far96] E. Dror-Farjoun, *Cellular spaces, null spaces and homotopy localization*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1622. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

El funtor CW_A

Teorema ([Far96])

Existe un funtor aumentado e idempotente

$$CW_A : \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Top}_*$$

(donde aumentado significa que existe una transformación natural $c : CW_A \to Id$, e idempotente que $CW_A(CW_A(X)) \simeq CW_A(X)$) tal que $CW_A(X)$ es A-celular y la aplicación aumentación $c_X : CW_A(X) \to X$ es una A-equivalencia.
$CW_A(X)$ es llamado la A-**celularización** de X.

Por ejemplo:

[Far96] E. Dror-Farjoun, *Cellular spaces, null spaces and homotopy localization*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1622. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

El funtor CW_A

Teorema ([Far96])

Existe un funtor aumentado e idempotente

$$CW_A : \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Top}_*$$

(donde aumentado significa que existe una transformación natural $c : CW_A \to Id$, e idempotente que $CW_A(CW_A(X)) \simeq CW_A(X)$) tal que $CW_A(X)$ es A-celular y la aplicación aumentación $c_X : CW_A(X) \to X$ es una A-equivalencia.
$CW_A(X)$ es llamado la A-**celularización** de X.

Por ejemplo:

- $CW_{S^0}(X)$ es la CW-aproximación clásica.

[Far96] E. Dror-Farjoun, *Cellular spaces, null spaces and homotopy localization*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1622. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

El funtor CW_A

Teorema ([Far96])

Existe un funtor aumentado e idempotente

$$CW_A : \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Top}_*$$

(donde aumentado significa que existe una transformación natural $c : CW_A \to Id$, e idempotente que $CW_A(CW_A(X)) \simeq CW_A(X)$) tal que $CW_A(X)$ es A-celular y la aplicación aumentación $c_X : CW_A(X) \to X$ es una A-equivalencia.
$CW_A(X)$ es llamado la A-**celularización** de X.

Por ejemplo:

- $CW_{S^0}(X)$ es la CW-aproximación clásica.
- $CW_{S^n}(X) = X\langle n-1\rangle$, el recubridor $(n-1)$-conexo de X.

[Far96] E. Dror-Farjoun, *Cellular spaces, null spaces and homotopy localization*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1622. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

Espacios A-nulos

¿Qué significa ser débilmente contráctil en A-homotopía?

Espacios A-nulos

¿Qué significa ser débilmente contráctil en A-homotopía?

Definición ([Bou94])

Un espacio X es A-**nulo** si $ev : \mathrm{map}(A, X) \xrightarrow{\simeq} X$.
Si X es conexo y punteado esta condición es equivalente a $\mathrm{map}_*(A, X) \simeq *$.

[Bou94] A.K. Bousfield, *Localization and periodicity in unstable homotopy theory*, J. Amer. Math. Soc.,7(4):831-873,1994.

Espacios A-nulos

¿Qué significa ser débilmente contráctil en A-homotopía?

Definición ([Bou94])

Un espacio X es A-**nulo** si $ev : \mathrm{map}(A, X) \xrightarrow{\simeq} X$.
Si X es conexo y punteado esta condición es equivalente a $\mathrm{map}_*(A, X) \simeq *$.

A partir de ahora todos nuestros espacios serán conexos.

[Bou94] A.K. Bousfield, *Localization and periodicity in unstable homotopy theory*, J. Amer. Math. Soc.,7(4):831-873,1994.

El funtor P_A

Teorema ([Bou94])

Existe un funtor coaumentado e idempotente

$$P_A : \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Top}_*$$

(coaumentado significa que existe una transformación natural $\eta : Id \to P_A$)

[Bou94] A.K. Bousfield, *Localization and periodicity in unstable homotopy theory*, J. Amer. Math. Soc.,7(4):831-873,1994.

El funtor P_A

Teorema ([Bou94])

Existe un funtor coaumentado e idempotente

$$P_A : \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Top}_*$$

(coaumentado significa que existe una transformación natural $\eta : Id \to P_A$) tal que $P_A(X)$ es A-nulo y si Y es un espacio A-nulo entonces $(\eta_X)^* : \mathrm{map}_*(P_A(X), Y) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{map}_*(X, Y)$.

[Bou94] A.K. Bousfield, *Localization and periodicity in unstable homotopy theory*, J. Amer. Math. Soc.,7(4):831-873,1994.

El funtor P_A

Teorema ([Bou94])

Existe un funtor coaumentado e idempotente

$$P_A : \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Top}_*$$

(coaumentado significa que existe una transformación natural $\eta : Id \to P_A$) tal que $P_A(X)$ es A-nulo y si Y es un espacio A-nulo entonces $(\eta_X)^* : \mathrm{map}_*(P_A(X), Y) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{map}_*(X, Y)$.
$P_A(X)$ es llamado la A-**nulificación** de X.

[Bou94] A.K. Bousfield, *Localization and periodicity in unstable homotopy theory*, J. Amer. Math. Soc.,7(4):831-873,1994.

El funtor P_A

Teorema ([Bou94])

Existe un funtor coaumentado e idempotente

$$P_A : \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Top}_*$$

(coaumentado significa que existe una transformación natural $\eta : Id \to P_A$) tal que $P_A(X)$ es A-nulo y si Y es un espacio A-nulo entonces $(\eta_X)^* : \mathrm{map}_*(P_A(X), Y) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{map}_*(X, Y)$.
$P_A(X)$ es llamado la A-**nulificación** de X.

Por ejemplo:

[Bou94] A.K. Bousfield, *Localization and periodicity in unstable homotopy theory*, J. Amer. Math. Soc.,7(4):831-873,1994.

El funtor P_A

Teorema ([Bou94])

Existe un funtor coaumentado e idempotente

$$P_A : \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Top}_*$$

(coaumentado significa que existe una transformación natural $\eta : Id \to P_A$) tal que $P_A(X)$ es A-nulo y si Y es un espacio A-nulo entonces $(\eta_X)^* : \mathrm{map}_*(P_A(X), Y) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{map}_*(X, Y)$.
$P_A(X)$ es llamado la A-**nulificación** de X.

Por ejemplo:

- $P_{S^n}(X) = P_{n-1}(X)$, la $(n-1)$-sección de Postnikov de X.

[Bou94] A.K. Bousfield, *Localization and periodicity in unstable homotopy theory*, J. Amer. Math. Soc.,7(4):831-873,1994.

Ejemplos

Ejemplos

- Si X es A-celular, entonces $P_A(X) \simeq *$.

Ejemplos

- Si X es A-celular, entonces $P_A(X) \simeq *$.
- Si X es A-nulo, entonces $CW_A(X) \simeq *$.

Ejemplos

- Si X es A-celular, entonces $P_A(X) \simeq *$.
- Si X es A-nulo, entonces $CW_A(X) \simeq *$.
- Si X es un CW-complejo finito y π es un grupo localmente finito, la conjetura de Sullivan nos dice que

Ejemplos

- Si X es A-celular, entonces $P_A(X) \simeq *$.
- Si X es A-nulo, entonces $CW_A(X) \simeq *$.
- Si X es un CW-complejo finito y π es un grupo localmente finito, la conjetura de Sullivan nos dice que

$$([\mathrm{Mil84}])\ \mathrm{map}_*(B\pi, X) \simeq *.$$

[Mil84] H. Miller, *The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces*, Ann. of Math. (2),120(1):39-87,1984.

Ejemplos

- Si X es A-celular, entonces $P_A(X) \simeq *$.
- Si X es A-nulo, entonces $CW_A(X) \simeq *$.
- Si X es un CW-complejo finito y π es un grupo localmente finito, la conjetura de Sullivan nos dice que

$$([\text{Mil84}])\ \operatorname{map}_*(B\pi, X) \simeq *.$$

Por tanto,

$$P_{B\pi}(X) \simeq X, \text{ es decir, } X \text{ es } B\pi\text{-nulo},$$

[Mil84] H. Miller, *The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces*, Ann. of Math. (2),120(1):39-87,1984.

Ejemplos

- Si X es A-celular, entonces $P_A(X) \simeq *$.
- Si X es A-nulo, entonces $CW_A(X) \simeq *$.
- Si X es un CW-complejo finito y π es un grupo localmente finito, la conjetura de Sullivan nos dice que

$$([\text{Mil84}])\ \mathrm{map}_*(B\pi, X) \simeq *.$$

Por tanto,

$$P_{B\pi}(X) \simeq X, \text{ es decir, } X \text{ es } B\pi\text{-nulo},$$

$$CW_{B\pi}(X) \simeq *.$$

[Mil84] H. Miller, *The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces*, Ann. of Math. (2),120(1):39-87,1984.

Índice

1. A-homotopía
2. p-completación de Bousfield-Kan
3. Celularización de $BG_p^\wedge$
   - Caso: G es un grupo finito
   - Caso: G un grupo de Lie compacto y conexo
4. Preguntas abiertas

p-completación de Bousfield-Kan

[BK72] Sea p un número primo. El funtor p-**completación de Bousfield-Kan** es un funtor coaumentado (no necesariamente idempotente)

$$(\,\cdot\,)_p^\wedge : \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Top}_*$$

[BK72] A.K. Bousfield and D.M. Kan, *Homotopy limits, completions and localizations*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 304. Springer-Verlag, Berlin, 1972.

p-completación de Bousfield-Kan

[BK72] Sea p un número primo. El funtor p-**completación de Bousfield-Kan** es un funtor coaumentado (no necesariamente idempotente)

$$(\,\cdot\,)_p^\wedge : \mathrm{Top}_* \to \mathrm{Top}_*$$

con la propiedad:

Una palicación $f : X \to Y$ induce una equivalencia $f_p^\wedge : X_p^\wedge \to Y_p^\wedge$ si y solamente si f induce una isomorfismo $f_* : H_*(X; \mathbb{F}_p) \xrightarrow{\cong} H_*(Y; \mathbb{F}_p)$.

[BK72] A.K. Bousfield and D.M. Kan, *Homotopy limits, completions and localizations*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 304. Springer-Verlag, Berlin, 1972.

p-completación de Bousfield-Kan

Sobre espacios "buenos" (e.g.: BG, donde G es un grupo de Lie compacto) este funtor es equivalente a

$$X_p^\wedge \simeq L_{\mathbb{Z}/p}(X)$$

donde $L_{\mathbb{Z}/p}(\,\cdot\,)$ denota la localización homológica respecto $H_*(\,\cdot\,;\mathbb{F}_p)$.

p-completación de Bousfield-Kan

Sobre espacios “buenos” (e.g.: BG, donde G es un grupo de Lie compacto) este funtor es equivalente a

$$X_p^{\wedge} \simeq L_{\mathbb{Z}/p}(X)$$

donde $L_{\mathbb{Z}/p}(\,\cdot\,)$ denota la localización homológica respecto $H_*(\,\cdot\,;\mathbb{F}_p)$.

Grosso modo, el funtor p-completación aisla la información p-primaria de un espacio.

Índice

1. A-homotopía
2. p-completación de Bousfield-Kan
3. Celularización de $BG_p^\wedge$
   - Caso: G es un grupo finito
   - Caso: G un grupo de Lie compacto y conexo
4. Preguntas abiertas

Celularización de $BG_p^\wedge$, G finito I

Sea G un grupo finito y sea $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$.

Proposición

Si BS es $B\mathbb{Z}/p^m$-celular entonces $BG_p^\wedge$ también lo es.

Celularización de $BG_p^\wedge$, G finito I

Sea G un grupo finito y sea $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$.

Proposición

Si BS es $B\mathbb{Z}/p^m$-celular entonces $BG_p^\wedge$ también lo es.

Pero, ¿cuándo BS es $B\mathbb{Z}/p^m$-celular?

Celularización de $BG_p^\wedge$, G finito I

Sea G un grupo finito y sea $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$.

Proposición

Si BS es $B\mathbb{Z}/p^m$-celular entonces $BG_p^\wedge$ también lo es.

Pero, ¿cuándo BS es $B\mathbb{Z}/p^m$-celular?

Proposición

Sea S un p-grupo finito. Entonces BS es $B\mathbb{Z}/p^m$-celular si y solamente si S está generado por sus elementos de orden p^i, con $i \leq m$.

Celularización de $BG_p^\wedge$, G finito I

Sea G un grupo finito y sea $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$.

Proposición

Si BS es $B\mathbb{Z}/p^m$-celular entonces $BG_p^\wedge$ también lo es.

Pero, ¿cuándo BS es $B\mathbb{Z}/p^m$-celular?

Proposición

Sea S un p-grupo finito. Entonces BS es $B\mathbb{Z}/p^m$-celular si y solamente si S está generado por sus elementos de orden p^i, con $i \leq m$.

Nótese que si S es un p-grupo finito siempre existe un $m_0 \geq 0$ tal que S está generado por sus elementos de orden p^i, con $i \leq m$ para todo $m \geq m_0$. Por tanto,

Celularización de $BG_p^\wedge$, G finito I

Sea G un grupo finito y sea $S \in \mathrm{Syl}_p(G)$.

Proposición

Si BS es $B\mathbb{Z}/p^m$-celular entonces $BG_p^\wedge$ también lo es.

Pero, ¿cuándo BS es $B\mathbb{Z}/p^m$-celular?

Proposición

Sea S un p-grupo finito. Entonces BS es $B\mathbb{Z}/p^m$-celular si y solamente si S está generado por sus elementos de orden p^i, con $i \leq m$.

Nótese que si S es un p-grupo finito siempre existe un $m_0 \geq 0$ tal que S está generado por sus elementos de orden p^i, con $i \leq m$ para todo $m \geq m_0$. Por tanto,

Corolario

Existe un $m_0 \geq 0$ tal que $BG_p^\wedge$ es $B\mathbb{Z}/p^m$-celular para todo $m \geq m_0$.

Celularización de $BG_p^\wedge$, G finito II

Y si $BG_p^\wedge$ es $B\mathbb{Z}/p^m$-celular, ¿lo es BS? Es decir, ¿S está generado por elementos de orden p^i, con $i \leq m$?

Celularización de $BG_p^\wedge$, G finito II

Y si $BG_p^\wedge$ es $B\mathbb{Z}/p^m$-celular, ¿lo es BS? Es decir, ¿S está generado por elementos de orden p^i, con $i \leq m$?

La respuesta es: no en general. Pero...

Celularización de $BG_p^\wedge$, G finito II

Y si $BG_p^\wedge$ es $B\mathbb{Z}/p^m$-celular, ¿lo es BS? Es decir, ¿S está generado por elementos de orden p^i, con $i \leq m$?

La respuesta es: no en general. Pero...

Teorema

$BG_p^\wedge$ es $B\mathbb{Z}/p^m$-cellular si y solamente si $S = Cl_{p^m}(S)$, donde $Cl_{p^m}(S)$ denota el subgrupo fuertemente cerrado de S más pequeño que contiene al subgrupo generado por sus elementos elementos de orden p^i, con $i \leq m$.

Celularización de $BG^\wedge_p$, G finito II

Y si $BG^\wedge_p$ es $B\mathbb{Z}/p^m$-celular, ¿lo es BS? Es decir, ¿S está generado por elementos de orden p^i, con $i \leq m$?

La respuesta es: no en general. Pero...

Teorema

$BG^\wedge_p$ es $B\mathbb{Z}/p^m$-cellular si y solamente si $S = Cl_{p^m}(S)$, donde $Cl_{p^m}(S)$ denota el subgrupo fuertemente cerrado de S más pequeño que contiene al subgrupo generado por sus elementos elementos de orden p^i, con $i \leq m$.

Definición

Sea G un grupo finito y $S \in \mathrm{Syl}_p(S)$. Decimos que $H \leq S$ es **fuertemente cerrado** si para todo $h \in H$ y $g \in G$ tal que $ghg^{-1} \in S$, entonces $ghg^{-1} \in H$.

Celularización de $BG_p^\wedge$, G finito II

Y si $BG_p^\wedge$ es $B\mathbb{Z}/p^m$-celular, ¿lo es BS? Es decir, ¿S está generado por elementos de orden p^i, con $i \leq m$?

La respuesta es: no en general. Pero...

Teorema

$BG_p^\wedge$ es $B\mathbb{Z}/p^m$-cellular si y solamente si $S = Cl_{p^m}(S)$, donde $Cl_{p^m}(S)$ denota el subgrupo fuertemente cerrado de S más pequeño que contiene al subgrupo generado por sus elementos elementos de orden p^i, con $i \leq m$.

Definición

Sea G un grupo finito y $S \in \mathrm{Syl}_p(S)$. Decimos que $H \leq S$ es **fuertemente cerrado** si para todo $h \in H$ y $g \in G$ tal que $ghg^{-1} \in S$, entonces $ghg^{-1} \in H$.

Observación

Todo lo anterior es cierto también para espacios clasificadores de grupos p-locales finitos.

p-subgrupo de Sylow de un grupo de Lie compacto I

Queremos reproducir un resultado similar al del caso finito pero ahora en grupos de Lie compactos.

p-subgrupo de Sylow de un grupo de Lie compacto I

Queremos reproducir un resultado similar al del caso finito pero ahora en grupos de Lie compactos.

Primero necesitamos definir qué es un p-subgrupo de Sylow de un grupo de Lie compacto.

p-subgrupo de Sylow de un grupo de Lie compacto I

Queremos reproducir un resultado similar al del caso finito pero ahora en grupos de Lie compactos.

Primero necesitamos definir qué es un p-subgrupo de Sylow de un grupo de Lie compacto.

Sea G un grupo de Lie compacto. Sea $T = T^r$ su toro maximal y $W = N_G(T)/T$ su grupo de Weyl (finito, porque G es compacto).

p-subgrupo de Sylow de un grupo de Lie compacto I

Queremos reproducir un resultado similar al del caso finito pero ahora en grupos de Lie compactos.

Primero necesitamos definir qué es un p-subgrupo de Sylow de un grupo de Lie compacto.

Sea G un grupo de Lie compacto. Sea $T = T^r$ su toro maximal y $W = N_G(T)/T$ su grupo de Weyl (finito, porque G es compacto).

Tenemos por tanto la extensión:

$$1 \to T \to N_G(T) \to W \to 1$$

p-subgrupo de Sylow de un grupo de Lie compacto I

Queremos reproducir un resultado similar al del caso finito pero ahora en grupos de Lie compactos.

Primero necesitamos definir qué es un p-subgrupo de Sylow de un grupo de Lie compacto.

Sea G un grupo de Lie compacto. Sea $T = T^r$ su toro maximal y $W = N_G(T)/T$ su grupo de Weyl (finito, porque G es compacto).

Tenemos por tanto la extensión:

$$1 \to T \to N_G(T) \to W \to 1$$

Sea $W_p \in \mathrm{Syl}_p(W)$, obtenemos y sea $N_p(T)$ el pull back de

$$\begin{tikzcd} N_p(T) \arrow[r] \arrow[d] & N_G(T) \arrow[d] \\ W_p \arrow[r, hook] & W \end{tikzcd}$$

p-subgrupo de Sylow de un grupo de Lie compacto II

Por tanto, obtenemos la extensión

$$1 \to T \to N_p(T) \to W_p \to 1$$

p-subgrupo de Sylow de un grupo de Lie compacto II

Por tanto, obtenemos la extensión

$$1 \to T \to N_p(T) \to W_p \to 1$$

donde $N_p(T)$ es un subgrupo p-toral maximal de G.

p-subgrupo de Sylow de un grupo de Lie compacto II

Por tanto, obtenemos la extensión

$$1 \to T \to N_p(T) \to W_p \to 1$$

donde $N_p(T)$ es un subgrupo p-toral maximal de G.

Sea $N_\infty(T)$ una aproximación p-discreta de $N_p(T)$, es decir, una extensión

$$1 \to (B\mathbb{Z}/p^\infty)^r \to N_\infty(T) \to W_p \to 1$$

p-subgrupo de Sylow de un grupo de Lie compacto II

Por tanto, obtenemos la extensión

$$1 \to T \to N_p(T) \to W_p \to 1$$

donde $N_p(T)$ es un subgrupo p-toral maximal de G.

Sea $N_\infty(T)$ una aproximación p-discreta de $N_p(T)$, es decir, una extensión

$$1 \to (B\mathbb{Z}/p^\infty)^r \to N_\infty(T) \to W_p \to 1$$

que satisface:

p-subgrupo de Sylow de un grupo de Lie compacto II

Por tanto, obtenemos la extensión

$$1 \to T \to N_p(T) \to W_p \to 1$$

donde $N_p(T)$ es un subgrupo p-toral maximal de G.

Sea $N_\infty(T)$ una aproximación p-discreta de $N_p(T)$, es decir, una extensión

$$1 \to (B\mathbb{Z}/p^\infty)^r \to N_\infty(T) \to W_p \to 1$$

que satisface:

- $BN_\infty(T)_p^\wedge \simeq BN_p(T)_p^\wedge$,

p-subgrupo de Sylow de un grupo de Lie compacto II

Por tanto, obtenemos la extensión

$$1 \to T \to N_p(T) \to W_p \to 1$$

donde $N_p(T)$ es un subgrupo p-toral maximal de G.

Sea $N_\infty(T)$ una aproximación p-discreta de $N_p(T)$, es decir, una extensión

$$1 \to (B\mathbb{Z}/p^\infty)^r \to N_\infty(T) \to W_p \to 1$$

que satisface:

- $BN_\infty(T)^\wedge_p \simeq BN_p(T)^\wedge_p$,
- Si π es un p-grupo finito, entonces

$$\begin{tikzcd} B\pi \arrow[rr] \arrow[dr, dashed] & & BG^\wedge_p \\ & BN_\infty(T) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Celularización de $BG_p^\wedge$, G grupo de Lie compacto I

Teorema

Si G es un grupo de Lie compacto y conexo, $A = B\mathbb{Z}/p^\infty \times B\mathbb{Z}/p^m$ o $B\mathbb{Z}/p^m$ y $BN_\infty(T)$ es A-celular, entonces tenemos la fibración

$$CW_A(BG_p^\wedge) \to BG_p^\wedge \to (BG_p^\wedge)_{\mathbb{Q}}.$$

Celularización de $BG^{\wedge}_p$, G grupo de Lie compacto I

Teorema

Si G es un grupo de Lie compacto y conexo, $A = B\mathbb{Z}/p^\infty \times B\mathbb{Z}/p^m$ o $B\mathbb{Z}/p^m$ y $BN_\infty(T)$ es A-celular, entonces tenemos la fibración

$$CW_A(BG^{\wedge}_p) \to BG^{\wedge}_p \to (BG^{\wedge}_p)_{\mathbb{Q}}.$$

Algunas observaciones:

Celularización de $BG_p^\wedge$, G grupo de Lie compacto I

Teorema

Si G es un grupo de Lie compacto y conexo, $A = B\mathbb{Z}/p^\infty \times B\mathbb{Z}/p^m$ o $B\mathbb{Z}/p^m$ y $BN_\infty(T)$ es A-celular, entonces tenemos la fibración

$$CW_A(BG_p^\wedge) \to BG_p^\wedge \to (BG_p^\wedge)_{\mathbb{Q}}.$$

Algunas observaciones:

- Si G no es conexo (y no es finito), con algunas hipótesis técnicas extra, podemos demostrar que $CW_A(BG_p^\wedge)_p^\wedge \simeq BG_p^\wedge$.

Celularización de $BG_p^\wedge$, G grupo de Lie compacto I

Teorema

Si G es un grupo de Lie compacto y conexo, $A = B\mathbb{Z}/p^\infty \times B\mathbb{Z}/p^m$ o $B\mathbb{Z}/p^m$ y $BN_\infty(T)$ es A-celular, entonces tenemos la fibración

$$CW_A(BG_p^\wedge) \to BG_p^\wedge \to (BG_p^\wedge)_{\mathbb{Q}}.$$

Algunas observaciones:

- Si G no es conexo (y no es finito), con algunas hipótesis técnicas extra, podemos demostrar que $CW_A(BG_p^\wedge)_p^\wedge \simeq BG_p^\wedge$.
- Salvo por la conectividad, este resultado es análogo al caso finito, ya que si G es finito, $(BG_p^\wedge)_{\mathbb{Q}} \simeq *$.

Celularización de $BG^\wedge_p$, G grupo de Lie compacto II

¿Cuándo $BN_\infty(T)$ es A-celular?

Celularización de $BG_p^\wedge$, G grupo de Lie compacto II

¿Cuándo $BN_\infty(T)$ es A-celular?

Proposición

Sea P un grupo p-toral discreto. Entonces existe un $m_0 \geq 0$ tal que BP es $(B\mathbb{Z}/p^\infty \times B\mathbb{Z}/p^m)$-celular para todo $m \geq m_0$.

Celularización de $BG_p^\wedge$, G grupo de Lie compacto II

¿Cuándo $BN_\infty(T)$ es A-celular?

Proposición

Sea P un grupo p-toral discreto. Entonces existe un $m_0 \geq 0$ tal que BP es $(B\mathbb{Z}/p^\infty \times B\mathbb{Z}/p^m)$-celular para todo $m \geq m_0$.

Y por tanto,

Celularización de $BG_p^\wedge$, G grupo de Lie compacto II

¿Cuándo $BN_\infty(T)$ es A-celular?

Proposición

Sea P un grupo p-toral discreto. Entonces existe un $m_0 \geq 0$ tal que BP es $(B\mathbb{Z}/p^\infty \times B\mathbb{Z}/p^m)$-celular para todo $m \geq m_0$.

Y por tanto,

Corolario

Sea G un grupo de Lie compacto y conexo. Entonces existe un $m_0 \geq 1$ y la fibración

$$CW_{B\mathbb{Z}/p^\infty \times B\mathbb{Z}/p^m}(BG_p^\wedge) \to BG_p^\wedge \to (BG_p^\wedge)_\mathbb{Q},$$

para todo $m \geq m_0$.

Ejemplos I

Algunos ejemplos son:

Ejemplos I

Algunos ejemplos son:

- $G = S^1$. En este caso $T = S^1$ y $W = \{e\}$. Además, $N_\infty(T) = \mathbb{Z}/p^\infty$.

Ejemplos I

Algunos ejemplos son:

- $G = S^1$. En este caso $T = S^1$ y $W = \{e\}$. Además, $N_\infty(T) = \mathbb{Z}/p^\infty$.
  Tenemos que $CW_{B\mathbb{Z}/p^m}(B\mathbb{Z}/p^\infty) \simeq B\mathbb{Z}/p^m$,

Ejemplos I

Algunos ejemplos son:

- $G = S^1$. En este caso $T = S^1$ y $W = \{e\}$. Además, $N_\infty(T) = \mathbb{Z}/p^\infty$.
  Tenemos que $CW_{B\mathbb{Z}/p^m}(B\mathbb{Z}/p^\infty) \simeq B\mathbb{Z}/p^m$,
  y $CW_{B\mathbb{Z}/p^\infty}(B\mathbb{Z}/p^\infty) \simeq B\mathbb{Z}/p^\infty$.

Ejemplos I

Algunos ejemplos son:

- $G = S^1$. En este caso $T = S^1$ y $W = \{e\}$. Además, $N_\infty(T) = \mathbb{Z}/p^\infty$.
  Tenemos que $CW_{B\mathbb{Z}/p^m}(B\mathbb{Z}/p^\infty) \simeq B\mathbb{Z}/p^m$,
  y $CW_{B\mathbb{Z}/p^\infty}(B\mathbb{Z}/p^\infty) \simeq B\mathbb{Z}/p^\infty$.
  Por tanto, $BN_\infty(T)$ es $(B\mathbb{Z}/p^\infty \times B\mathbb{Z}/p^m)$-celular para todo $m \geq 0$.

Ejemplos I

Algunos ejemplos son:

- $G = S^1$. En este caso $T = S^1$ y $W = \{e\}$. Además, $N_\infty(T) = \mathbb{Z}/p^\infty$.
  Tenemos que $CW_{B\mathbb{Z}/p^m}(B\mathbb{Z}/p^\infty) \simeq B\mathbb{Z}/p^m$,
  y $CW_{B\mathbb{Z}/p^\infty}(B\mathbb{Z}/p^\infty) \simeq B\mathbb{Z}/p^\infty$.
  Por tanto, $BN_\infty(T)$ es $(B\mathbb{Z}/p^\infty \times B\mathbb{Z}/p^m)$-celular para todo $m \geq 0$.
  Y se obtiene la fibración

$$CW_{B\mathbb{Z}/p^\infty \times B\mathbb{Z}/p^m}((BS^1)_p^\wedge) \to (BS^1)_p^\wedge \to ((BS^1)_p^\wedge)_{\mathbb{Q}},$$

  para todo $m \geq 0$.

Ejemplos I

Algunos ejemplos son:

- $G = S^1$. En este caso $T = S^1$ y $W = \{e\}$. Además, $N_\infty(T) = \mathbb{Z}/p^\infty$.
  Tenemos que $CW_{B\mathbb{Z}/p^m}(B\mathbb{Z}/p^\infty) \simeq B\mathbb{Z}/p^m$,
  y $CW_{B\mathbb{Z}/p^\infty}(B\mathbb{Z}/p^\infty) \simeq B\mathbb{Z}/p^\infty$.
  Por tanto, $BN_\infty(T)$ es $(B\mathbb{Z}/p^\infty \times B\mathbb{Z}/p^m)$-celular para todo $m \geq 0$.
  Y se obtiene la fibración

  $$CW_{B\mathbb{Z}/p^\infty \times B\mathbb{Z}/p^m}((BS^1)_p^\wedge) \to (BS^1)_p^\wedge \to ((BS^1)_p^\wedge)_\mathbb{Q},$$

  para todo $m \geq 0$.
  En el caso $A = B\mathbb{Z}/p^m$, $CW_{B\mathbb{Z}/p^m}((BS^1)_p^\wedge) \simeq B\mathbb{Z}/p^m$.

Ejemplos II

- $G = S^3$. En este caso $T = S^1$ y $W = \mathbb{Z}/2$. Estudiemos el caso $p = 2$.

Ejemplos II

- $G = S^3$. En este caso $T = S^1$ y $W = \mathbb{Z}/2$. Estudiemos el caso $p = 2$.
  Tenemos que $CW_{B\mathbb{Z}/2}(BN_\infty(T)) \simeq B\mathbb{Z}/2$,

Ejemplos II

- $G = S^3$. En este caso $T = S^1$ y $W = \mathbb{Z}/2$. Estudiemos el caso $p = 2$.
  Tenemos que $CW_{B\mathbb{Z}/2}(BN_\infty(T)) \simeq B\mathbb{Z}/2$,
  y $CW_{B\mathbb{Z}/2^m}(BN_\infty(T)) \simeq BN_\infty(T)$, para todo $m \geq 2$.

Ejemplos II

- $G = S^3$. En este caso $T = S^1$ y $W = \mathbb{Z}/2$. Estudiemos el caso $p = 2$.
  Tenemos que $CW_{B\mathbb{Z}/2}(BN_\infty(T)) \simeq B\mathbb{Z}/2$,
  y $CW_{B\mathbb{Z}/2^m}(BN_\infty(T)) \simeq BN_\infty(T)$, para todo $m \geq 2$.
  Por tanto, obtenemos la fibración

$$CW_{B\mathbb{Z}/2^m}((BS^3)_p^\wedge) \to (BS^3)_p^\wedge \to ((BS^3)_p^\wedge)_\mathbb{Q},$$

  para todo $m \geq 2$.

Ejemplos II

- $G = S^3$. En este caso $T = S^1$ y $W = \mathbb{Z}/2$. Estudiemos el caso $p = 2$.
  Tenemos que $CW_{B\mathbb{Z}/2}(BN_\infty(T)) \simeq B\mathbb{Z}/2$,
  y $CW_{B\mathbb{Z}/2^m}(BN_\infty(T)) \simeq BN_\infty(T)$, para todo $m \geq 2$.
  Por tanto, obtenemos la fibración

$$CW_{B\mathbb{Z}/2^m}((BS^3)_p^\wedge) \to (BS^3)_p^\wedge \to ((BS^3)_p^\wedge)_\mathbb{Q},$$

  para todo $m \geq 2$.
  En el caso $m = 1$, en [CF13] se demuestra que
  $CW_{B\mathbb{Z}/2}((BS^3)_p^\wedge) \simeq B\mathbb{Z}/2$.

[CF13] N. Castellana and R.Flores, *Homotopy idempotent functors on classifying spaces*, to appear in Trans. Amer. Math. Soc., 2013.

Índice

1. A-homotopía
2. p-completación de Bousfield-Kan
3. Celularización de $BG_p^\wedge$
   - Caso: G es un grupo finito
   - Caso: G un grupo de Lie compacto y conexo
4. Preguntas abiertas

Preguntas abiertas (Work in progress)

Preguntas abiertas (Work in progress)

- Como en el caso finito, si G es un grupo de Lie compacto y $N_\infty(T)$ no es cierto subgrupo fuertemente cerrado,

$$¿\ CW_A(BG^\wedge_p) \to BG^\wedge_p \to (BG^\wedge_p)_{\mathbb{Q}} \text{ es un fibración?}$$

Preguntas abiertas (Work in progress)

- Como en el caso finito, si G es un grupo de Lie compacto y $N_\infty(T)$ no es cierto subgrupo fuertemente cerrado,

$$¿\ CW_A(BG_p^\wedge) \to BG_p^\wedge \to (BG_p^\wedge)_{\mathbb{Q}} \text{ es un fibración?}$$

- Si $BN_\infty(T)$ (o BS) no es A-celular, ¿quién es $CW_A(BG_p^\wedge)$?

Preguntas abiertas (Work in progress)

- Como en el caso finito, si G es un grupo de Lie compacto y $N_\infty(T)$ no es cierto subgrupo fuertemente cerrado,

$$¿\ CW_A(BG_p^\wedge) \to BG_p^\wedge \to (BG_p^\wedge)_{\mathbb{Q}} \text{ es un fibración?}$$

- Si $BN_\infty(T)$ (o BS) no es A-celular, ¿quién es $CW_A(BG_p^\wedge)$?
- ¿El resultado es cierto para grupos p-compactos y/o grupos p-locales compactos?

¡GRACIAS!