Un teorema tipo Efimov para grafos en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$.

Un trabajo conjunto con José A. Gálvez.

José Luis Teruel Carretero.

Universidad de Granada
Departamento de Geometría y Topología

18 de Septiembre de 2013

Introducción.

Introducción

1. **Euclídeo tridimensional.**

Introducción

1. **Euclídeo tridimensional.**
   - D. Hilbert demostró en 1901 que no existen inmersiones de superficies completas con curvatura de Gauss constante y negativa.

Introducción

1. **Euclídeo tridimensional.**
   - D. Hilbert demostró en 1901 que no existen inmersiones de superficies completas con curvatura de Gauss constante y negativa.
   - N. H. Efimov generaliza este resultado en 1964 para superficies completas con curvatura extrínseca acotada superiormente por una constante negativa.

Introducción

1. **Euclídeo tridimensional.**
   - ◇ D. Hilbert demostró en 1901 que no existen inmersiones de superficies completas con curvatura de Gauss constante y negativa.
   - ◇ N. H. Efimov generaliza este resultado en 1964 para superficies completas con curvatura extrínseca acotada superiormente por una constante negativa.
2. **Otros espacios ambiente.**

Introducción

1. **Euclídeo tridimensional.**
   - D. Hilbert demostró en 1901 que no existen inmersiones de superficies completas con curvatura de Gauss constante y negativa.
   - N. H. Efimov generaliza este resultado en 1964 para superficies completas con curvatura extrínseca acotada superiormente por una constante negativa.
2. **Otros espacios ambiente.**
   - J. M. Schlenker demuestra en 2001 un resultado del mismo tipo que Efimov para superficies completas en $\mathbb{H}^3$, $\mathbb{S}^3$ y $\mathbb{H}^3_1$, con hipótesis adicionales sobre el gradiente de la curvatura de Gauss específicas para cada caso.

Introducción

1. **Euclídeo tridimensional.**
   - D. Hilbert demostró en 1901 que no existen inmersiones de superficies completas con curvatura de Gauss constante y negativa.
   - N. H. Efimov generaliza este resultado en 1964 para superficies completas con curvatura extrínseca acotada superiormente por una constante negativa.
2. **Otros espacios ambiente.**
   - J. M. Schlenker demuestra en 2001 un resultado del mismo tipo que Efimov para superficies completas en $\mathbb{H}^3$, $\mathbb{S}^3$ y $\mathbb{H}^3_1$, con hipótesis adicionales sobre el gradiente de la curvatura de Gauss específicas para cada caso.
   - No se conoce mucho sobre el comportamiento de la curvatura extrínsica de superficies completas en espacios producto $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$.

Objetivos

1. Demostraremos que no hay grafos completos con curvatura extrínseca acotada superiormente por una constante negativa en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ cuando la curvatura de $\mathbb{M}^2$ es no negativa usando razonamientos similares a los usados por E. Heinz, el cual demostró en 1955 este mismo resultado para grafos cuando el espacio ambiente es $\mathbb{R}^3$.

Objetivos

1. Demostraremos que no hay grafos completos con curvatura extrínseca acotada superiormente por una constante negativa en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ cuando la curvatura de $\mathbb{M}^2$ es no negativa usando razonamientos similares a los usados por E. Heinz, el cual demostró en 1955 este mismo resultado para grafos cuando el espacio ambiente es $\mathbb{R}^3$.
2. Daremos un ejemplo de existencia de superficies completas con curvatura extrínseca negativa en espacios producto cuando la curvatura de $\mathbb{M}^2$ es negativa.

Grafos con curvatura extrínseca negativa.

Consideraciones previas.

- Sea $\mathbb{M}^2$ una superficie riemanniana y (r, θ) coordenadas geodésicas polares alrededor de un punto $p_0 \in \mathbb{M}^2$ bien definidas para $r < R$, con R cierto valor positivo. La métrica inducida viene dada por

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = dr^2 + G\,(r, \theta)\, d\theta^2.$$

Consideraciones previas.

- Sea $\mathbb{M}^2$ una superficie riemanniana y (r, θ) coordenadas geodésicas polares alrededor de un punto $p_0 \in \mathbb{M}^2$ bien definidas para $r < R$, con R cierto valor positivo. La métrica inducida viene dada por

$$\langle \cdot, \cdot \rangle = dr^2 + G\left(r, \theta\right) d\theta^2.$$

- Consideramos $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ dotada con la métrica producto y sea Σ un grafo vertical en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ sobre la bola $B\left(p_0, R\right)$ y parametrizada por

$$\psi(r, \theta) = \Big(exp_{p_0}\left(rcos(\theta), rsin(\theta)\right), z(r, \theta)\Big) \equiv (r, \theta, z(r, \theta))$$

con métrica inducida dada por

$$ds^2 = \left(1 + z_r^2\right) dr^2 + 2 z_r z_\theta dr d\theta + \left(G + z_\theta^2\right) d\theta^2.$$

- El correspondiente vector normal unitario

$$N = \frac{-1}{\sqrt{1 + z_r^2 + \frac{z_\theta^2}{G}}} \left(z_r \partial_r + \frac{z_\theta}{G} \partial_\theta - \partial_t \right)$$

- El correspondiente vector normal unitario

$$N = \frac{-1}{\sqrt{1 + z_r^2 + \frac{z_\theta^2}{G}}} \left(z_r \partial_r + \frac{z_\theta}{G} \partial_\theta - \partial_t \right)$$

Nota

Usando lo anterior, por medio de un cálculo llegamos a la siguiente fórmula:

$$\left(\sqrt{G}\right)_r d\left(\left(z_r^2 + \frac{z_\theta^2}{G}\right) d\theta\right) + d\left(z_r d\left(\frac{z_\theta}{\sqrt{G}}\right) - \frac{z_\theta}{\sqrt{G}} dz_r\right)$$
$$= 2\sqrt{G}\left(1 + z_r^2 + \frac{z_\theta^2}{G}\right)^2 K_{ext}\,(dr \wedge d\theta),$$

donde K_{ext} denota la curvatura extrínseca de Σ.

Lemas previos.

Definimos la siguiente función auxiliar:

$$f(r) = \int_{B_r} \sqrt{G}\left(1 + \frac{z_\theta^2}{G}\right), \quad r > 0$$

donde B_r denota la bola centrada en el origen de $\mathbb{R}^2$ y radio r, con $r < R$. Estamos identificando $\mathbb{R}^2$ y el plano tangente de $\mathbb{M}^2$ en p_0, $T_{p_0}\mathbb{M}^2$, de la manera usual.

Lemas previos.

Definimos la siguiente función auxiliar:

$$f(r) = \int_{B_r} \sqrt{G}\left(1 + \frac{z_\theta^2}{G}\right), \quad r > 0$$

donde B_r denota la bola centrada en el origen de $\mathbb{R}^2$ y radio r, con $r < R$. Estamos identificando $\mathbb{R}^2$ y el plano tangente de $\mathbb{M}^2$ en p_0, $T_{p_0}\mathbb{M}^2$, de la manera usual.

Lema 1

Se cumple la siguiente desigualdad:

$$|B_r| \leq f(r) \leq \sqrt{|B_r|}\left(\int_{B_r} \sqrt{G}\left(1 + z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

donde $|B_r|$ denota el área del disco geodésico $B(p_0, r)$ en $\mathbb{M}^2$.

Lemas previos.

Definimos la siguiente función auxiliar:

$$f(r) = \int_{B_r} \sqrt{G}\left(1 + \frac{z_\theta^2}{G}\right), \quad r > 0$$

donde B_r denota la bola centrada en el origen de $\mathbb{R}^2$ y radio r, con $r < R$. Estamos identificando $\mathbb{R}^2$ y el plano tangente de $\mathbb{M}^2$ en p_0, $T_{p_0}\mathbb{M}^2$, de la manera usual.

Lema 1

Se cumple la siguiente desigualdad:

$$|B_r| \leq f(r) \leq \sqrt{|B_r|}\left(\int_{B_r} \sqrt{G}\left(1 + z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

donde $|B_r|$ denota el área del disco geodésico $B(p_0, r)$ en $\mathbb{M}^2$.

En la prueba se usa la ***desigualdad de Cauchy-Schwartz****.*

Lema 2

Denotemos por $K_{\mathbb{M}}$ la curvatura de Gauss de $\mathbb{M}^2$. Entonces en las condiciones anteriores se tiene que,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\int_0^{2\pi}\left(\frac{z_\theta^2}{\sqrt{G}}\right)d\theta &= \int_0^{2\pi}\left(\sqrt{G}\right)_r z_r^2\,d\theta + \int_{B_r}\left(z_\rho^2+\frac{z_\theta^2}{G}\right)K_{\mathbb{M}}\sqrt{G} \\
&- 2\int_{B_r}\sqrt{G}\left(1+z_\rho^2+\frac{z_\theta^2}{G}\right)^2 K_{ext}.
\end{aligned}
$$

Teorema

Sea $\mathbb{M}^2$ una superficie riemanniana con un polo. Si su curvatura de Gauss es no negativa, entonces no existen grafos verticales enteros en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ con curvatura extrínseca acotada superiormente por una constante negativa $-\alpha$.

Teorema

Sea $\mathbb{M}^2$ una superficie riemanniana con un polo. Si su curvatura de Gauss es no negativa, entonces no existen grafos verticales enteros en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ con curvatura extrínseca acotada superiormente por una constante negativa $-\alpha$.

Idea de la demostración:

Teorema

Sea $\mathbb{M}^2$ una superficie riemanniana con un polo. Si su curvatura de Gauss es no negativa, entonces no existen grafos verticales enteros en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ con curvatura extrínseca acotada superiormente por una constante negativa $-\alpha$.

Idea de la demostración: Por ***Lema 2*** tenemos que

$$f''(r) = \overbrace{\int_0^{2\pi} \left(\sqrt{G}\right)_r \left(1 + z_r^2\right) d\theta + \int_{B_r} \left(z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G}\right) K_{\mathbb{M}} \sqrt{G}}^{\geq 0} - 2 \int_{B_r} \sqrt{G} \left(1 + z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G}\right)^2 K_{ext}.$$

Teorema

Sea $\mathbb{M}^2$ una superficie riemanniana con un polo. Si su curvatura de Gauss es no negativa, entonces no existen grafos verticales enteros en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ con curvatura extrínseca acotada superiormente por una constante negativa $-\alpha$.

Idea de la demostración: Por *Lema 2* tenemos que

$$f''(r) = \overbrace{\int_0^{2\pi} \left(\sqrt{G}\right)_r \left(1 + z_r^2\right) d\theta + \int_{B_r} \left(z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G}\right) K_{\mathbb{M}} \sqrt{G}}^{\geq 0} - 2 \int_{B_r} \sqrt{G} \left(1 + z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G}\right)^2 K_{ext}.$$

Luego $f''(r) \geq \frac{2\alpha}{|B_r|} f(r)^2$ por *Lema 1*

Teorema

Sea $\mathbb{M}^2$ una superficie riemanniana con un polo. Si su curvatura de Gauss es no negativa, entonces no existen grafos verticales enteros en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ con curvatura extrínseca acotada superiormente por una constante negativa $-\alpha$.

Idea de la demostración: Por *Lema 2* tenemos que

$$f''(r) = \overbrace{\int_0^{2\pi} \left(\sqrt{G}\right)_r \left(1 + z_r^2\right) d\theta + \int_{B_r} \left(z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G}\right) K_{\mathbb{M}} \sqrt{G}}^{\geq 0} - 2 \int_{B_r} \sqrt{G} \left(1 + z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G}\right)^2 K_{ext}.$$

Luego $f''(r) \geq \frac{2\alpha}{|B_r|} f(r)^2$ por *Lema 1* $\Rightarrow \frac{d}{d\rho}\left(f'(\rho)^2\right) \geq \frac{4\alpha}{3|B_r|} \frac{d}{d\rho}\left(f(\rho)^3\right)$.

Teorema

Sea $\mathbb{M}^2$ una superficie riemanniana con un polo. Si su curvatura de Gauss es no negativa, entonces no existen grafos verticales enteros en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ con curvatura extrínseca acotada superiormente por una constante negativa $-\alpha$.

Idea de la demostración: Por *Lema 2* tenemos que

$$f''(r) = \overbrace{\int_0^{2\pi} \left(\sqrt{G}\right)_r \left(1 + z_r^2\right) d\theta + \int_{B_r} \left(z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G}\right) K_{\mathbb{M}} \sqrt{G}}^{\geq 0} - 2 \int_{B_r} \sqrt{G} \left(1 + z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G}\right)^2 K_{ext}.$$

Luego $f''(r) \geq \frac{2\alpha}{|B_r|} f(r)^2$ por *Lema 1* $\Rightarrow \frac{d}{d\rho}\left(f'(\rho)^2\right) \geq \frac{4\alpha}{3|B_r|} \frac{d}{d\rho}\left(f(\rho)^3\right)$.

Por integración tenemos que $f'(r)^2 \geq \frac{4\alpha}{3|B_r|}\left(f(r)^3 - f(\epsilon)^3\right)$, con $0 < \epsilon < r$. Es claro que $f(\epsilon) \to 0$ si $\epsilon \to 0$,

Teorema

Sea $\mathbb{M}^2$ una superficie riemanniana con un polo. Si su curvatura de Gauss es no negativa, entonces no existen grafos verticales enteros en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ con curvatura extrínseca acotada superiormente por una constante negativa $-\alpha$.

Idea de la demostración: Por *Lema 2* tenemos que

$$f''(r) = \overbrace{\int_0^{2\pi} \left(\sqrt{G}\right)_r \left(1 + z_r^2\right) d\theta + \int_{B_r} \left(z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G}\right) K_{\mathbb{M}} \sqrt{G}}^{\geq 0} - 2\int_{B_r} \sqrt{G} \left(1 + z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G}\right)^2 K_{ext}.$$

Luego $f''(r) \geq \frac{2\alpha}{|B_r|} f(r)^2$ por *Lema 1* $\Rightarrow \frac{d}{d\rho}\left(f'(\rho)^2\right) \geq \frac{4\alpha}{3|B_r|} \frac{d}{d\rho}\left(f(\rho)^3\right)$.

Por integración tenemos que $f'(r)^2 \geq \frac{4\alpha}{3|B_r|}\left(f(r)^3 - f(\epsilon)^3\right)$, con $0 < \epsilon < r$. Es claro que $f(\epsilon) \to 0$ si $\epsilon \to 0$, luego $-\frac{d}{dr}\left(f(r)^{-\frac{1}{2}}\right) \geq \sqrt{\frac{\alpha}{3|B_r|}}$.

Teorema

Sea $\mathbb{M}^2$ una superficie riemanniana con un polo. Si su curvatura de Gauss es no negativa, entonces no existen grafos verticales enteros en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ con curvatura extrínseca acotada superiormente por una constante negativa $-\alpha$.

Idea de la demostración: Por *Lema 2* tenemos que

$$f''(r) = \overbrace{\int_0^{2\pi} \left(\sqrt{G}\right)_r \left(1 + z_r^2\right) d\theta + \int_{B_r} \left(z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G}\right) K_{\mathbb{M}} \sqrt{G}}^{\geq 0} - 2 \int_{B_r} \sqrt{G} \left(1 + z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G}\right)^2 K_{ext}.$$

Luego $f''(r) \geq \frac{2\alpha}{|B_r|} f(r)^2$ por *Lema 1* $\Rightarrow \frac{d}{d\rho}\left(f'(\rho)^2\right) \geq \frac{4\alpha}{3|B_r|} \frac{d}{d\rho}\left(f(\rho)^3\right)$.

Por integración tenemos que $f'(r)^2 \geq \frac{4\alpha}{3|B_r|}\left(f(r)^3 - f(\epsilon)^3\right)$, con $0 < \epsilon < r$. Es claro que $f(\epsilon) \to 0$ si $\epsilon \to 0$, luego $-\frac{d}{dr}\left(f(r)^{-\frac{1}{2}}\right) \geq \sqrt{\frac{\alpha}{3|B_r|}}$.

Como $K_{\mathbb{M}} \geq 0$, por el *teorema de comparación de volúmenes* se tiene que $|B_r| \leq \pi r^2$,

Teorema

Sea $\mathbb{M}^2$ una superficie riemanniana con un polo. Si su curvatura de Gauss es no negativa, entonces no existen grafos verticales enteros en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ con curvatura extrínseca acotada superiormente por una constante negativa $-\alpha$.

Idea de la demostración: Por *Lema 2* tenemos que

$$f''(r) = \overbrace{\int_0^{2\pi} \left(\sqrt{G}\right)_r \left(1 + z_r^2\right) d\theta + \int_{B_r} \left(z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G}\right) K_{\mathbb{M}} \sqrt{G}}^{\geq 0} - 2\int_{B_r} \sqrt{G} \left(1 + z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G}\right)^2 K_{ext}.$$

Luego $f''(r) \geq \frac{2\alpha}{|B_r|} f(r)^2$ por *Lema 1* $\Rightarrow \frac{d}{d\rho}\left(f'(\rho)^2\right) \geq \frac{4\alpha}{3|B_r|} \frac{d}{d\rho}\left(f(\rho)^3\right)$.

Por integración tenemos que $f'(r)^2 \geq \frac{4\alpha}{3|B_r|}\left(f(r)^3 - f(\epsilon)^3\right)$, con $0 < \epsilon < r$. Es claro que $f(\epsilon) \to 0$ si $\epsilon \to 0$, luego $-\frac{d}{dr}\left(f(r)^{-\frac{1}{2}}\right) \geq \sqrt{\frac{\alpha}{3|B_r|}}$.

Como $K_{\mathbb{M}} \geq 0$, por el *teorema de comparación de volúmenes* se tiene que $|B_r| \leq \pi r^2$, de lo anterior tenemos que

$$\int_{R_1}^{R_2} -\frac{d}{dr}\left(f(r)^{-\frac{1}{2}}\right) dr = -f(R_2)^{-\frac{1}{2}} + f(R_1)^{-\frac{1}{2}} \geq \sqrt{\frac{\alpha}{3\pi}} \log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Teorema

Sea $\mathbb{M}^2$ una superficie riemanniana con un polo. Si su curvatura de Gauss es no negativa, entonces no existen grafos verticales enteros en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ con curvatura extrínseca acotada superiormente por una constante negativa $-\alpha$.

Idea de la demostración: Por *Lema 2* tenemos que

$$f''(r) = \overbrace{\int_0^{2\pi} \left(\sqrt{G}\right)_r \left(1 + z_r^2\right) d\theta + \int_{B_r} \left(z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G}\right) K_{\mathbb{M}} \sqrt{G}}^{\geq 0} - 2 \int_{B_r} \sqrt{G} \left(1 + z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G}\right)^2 K_{ext}.$$

Luego $f''(r) \geq \frac{2\alpha}{|B_r|} f(r)^2$ por *Lema 1* $\Rightarrow \frac{d}{d\rho}\left(f'(\rho)^2\right) \geq \frac{4\alpha}{3|B_r|} \frac{d}{d\rho}\left(f(\rho)^3\right)$.

Por integración tenemos que $f'(r)^2 \geq \frac{4\alpha}{3|B_r|}\left(f(r)^3 - f(\epsilon)^3\right)$, con $0 < \epsilon < r$. Es claro que $f(\epsilon) \to 0$ si $\epsilon \to 0$, luego $-\frac{d}{dr}\left(f(r)^{-\frac{1}{2}}\right) \geq \sqrt{\frac{\alpha}{3|B_r|}}$.

Como $K_{\mathbb{M}} \geq 0$, por el *teorema de comparación de volúmenes* se tiene que $|B_r| \leq \pi r^2$, de lo anterior tenemos que

$$\int_{R_1}^{R_2} -\frac{d}{dr}\left(f(r)^{-\frac{1}{2}}\right) dr = -f(R_2)^{-\frac{1}{2}} + f(R_1)^{-\frac{1}{2}} \geq \sqrt{\frac{\alpha}{3\pi}} \log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$\Rightarrow \left|B_{R_1}\right|^{-\frac{1}{2}} \geq \sqrt{\frac{\alpha}{3\pi}} \log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$ por *Lema 1*,

Teorema

Sea $\mathbb{M}^2$ una superficie riemanniana con un polo. Si su curvatura de Gauss es no negativa, entonces no existen grafos verticales enteros en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ con curvatura extrínseca acotada superiormente por una constante negativa $-\alpha$.

Idea de la demostración: Por *Lema 2* tenemos que

$$f''(r) = \overbrace{\int_0^{2\pi} \left(\sqrt{G}\right)_r \left(1+z_r^2\right) d\theta + \int_{B_r} \left(z_\rho^2 + \frac{z_\theta^2}{G}\right) K_{\mathbb{M}} \sqrt{G}}^{\geq 0} - 2\int_{B_r} \sqrt{G} \left(1+z_\rho^2+\frac{z_\theta^2}{G}\right)^2 K_{ext}.$$

Luego $f''(r) \geq \frac{2\alpha}{|B_r|} f(r)^2$ por *Lema 1* $\Rightarrow \frac{d}{d\rho}\left(f'(\rho)^2\right) \geq \frac{4\alpha}{3|B_r|}\frac{d}{d\rho}\left(f(\rho)^3\right)$.

Por integración tenemos que $f'(r)^2 \geq \frac{4\alpha}{3|B_r|}\left(f(r)^3 - f(\epsilon)^3\right)$, con $0<\epsilon<r$. Es claro que $f(\epsilon) \to 0$ si $\epsilon \to 0$, luego $-\frac{d}{dr}\left(f(r)^{-\frac{1}{2}}\right) \geq \sqrt{\frac{\alpha}{3|B_r|}}$.

Como $K_{\mathbb{M}} \geq 0$, por el *teorema de comparación de volúmenes* se tiene que $|B_r| \leq \pi r^2$, de lo anterior tenemos que

$$\int_{R_1}^{R_2} -\frac{d}{dr}\left(f(r)^{-\frac{1}{2}}\right) dr = -f(R_2)^{-\frac{1}{2}} + f(R_1)^{-\frac{1}{2}} \geq \sqrt{\frac{\alpha}{3\pi}} \log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$\Rightarrow \left|B_{R_1}\right|^{-\frac{1}{2}} \geq \sqrt{\frac{\alpha}{3\pi}} \log\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$ por *Lema 1*, esto es $R_2 \leq R_1 \exp\left(\sqrt{\frac{3\pi}{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{\left|B_{R_1}\right|}}\right)$ para cualesquiera $0 < R_1 < R_2$, con R_2 arbitrario, lo que demuestra el teorema.

Ejemplo de existencia.

Sea $\mathbb{M}^2$ vista como $\mathbb{R}^2$ con la métrica inducida $\langle \cdot, \cdot \rangle = d\rho^2 + G(\rho)d\theta^2$, la cual está bien definida en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, donde (ρ, θ) son las coordenadas polares usuales de $\mathbb{R}^2$.

Sea $\mathbb{M}^2$ vista como $\mathbb{R}^2$ con la métrica inducida $\langle \cdot, \cdot \rangle = d\rho^2 + G(\rho)d\theta^2$, la cual está bien definida en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, donde (ρ, θ) son las coordenadas polares usuales de $\mathbb{R}^2$.
Sea Σ una superficie de rotación en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ parametrizada por

$$\Psi(r,\theta) = \Big(k(r)\cos(\theta), k(r)\sin(\theta), z(r)\Big) \equiv \Big(k(r), \theta, z(r)\Big)$$

donde $k(r) > 0$ y $z(r)$ son funciones diferenciables, y r denota el parámetro longitud de arco de la curva generatriz de Σ, es decir $\beta(r) = \Psi(r, 0)$.

Sea $\mathbb{M}^2$ vista como $\mathbb{R}^2$ con la métrica inducida $\langle \cdot, \cdot \rangle = d\rho^2 + G(\rho)d\theta^2$, la cual está bien definida en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, donde (ρ, θ) son las coordenadas polares usuales de $\mathbb{R}^2$.
Sea Σ una superficie de rotación en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ parametrizada por

$$\Psi(r,\theta) = \Big(k(r)\cos(\theta), k(r)\sin(\theta), z(r)\Big) \equiv \Big(k(r), \theta, z(r)\Big)$$

donde $k(r) > 0$ y $z(r)$ son funciones diferenciables, y r denota el parámetro longitud de arco de la curva generatriz de Σ, es decir $\beta(r) = \Psi(r, 0)$. La métrica inducida en nuestra superficie viene dada por $ds^2 = dr^2 + G\big(k(r)\big)d\theta^2$,

Sea $\mathbb{M}^2$ vista como $\mathbb{R}^2$ con la métrica inducida $\langle \cdot, \cdot \rangle = d\rho^2 + G(\rho)d\theta^2$, la cual está bien definida en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, donde (ρ, θ) son las coordenadas polares usuales de $\mathbb{R}^2$.
Sea Σ una superficie de rotación en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$ parametrizada por

$$\Psi(r,\theta) = \Big(k(r)\cos(\theta), k(r)\sin(\theta), z(r)\Big) \equiv \Big(k(r), \theta, z(r)\Big)$$

donde $k(r) > 0$ y $z(r)$ son funciones diferenciables, y r denota el parámetro longitud de arco de la curva generatriz de Σ, es decir $\beta(r) = \Psi(r, 0)$. La métrica inducida en nuestra superficie viene dada por $ds^2 = dr^2 + G\big(k(r)\big)d\theta^2$, y la curvatura extrínseca del grafo es

$$K_{ext} = -z'(r)\frac{G_\rho\big(k(r)\big)}{2G\big(k(r)\big)}\big(k''(r)z'(r) - k'(r)z''(r)\big).$$

Por ser r el parámetro arco de la generatriz se verifica

$$k'(r)^2 + z'(r)^2 = 1.$$

Por ser r el parámetro arco de la generatriz se verifica

$$k'(r)^2 + z'(r)^2 = 1.$$

Si derivamos la ecuación anterior, la ecuación de la curvatura extrínseca del grafo se puede reescribir así

$$k''(r) = -\frac{2G\big(k(r)\big)}{G_\rho\big(k(r)\big)} K_{ext}.$$

Por ser r el parámetro arco de la generatriz se verifica

$$k'(r)^2 + z'(r)^2 = 1.$$

Si derivamos la ecuación anterior, la ecuación de la curvatura extrínseca del grafo se puede reescribir así

$$k''(r) = -\frac{2G\big(k(r)\big)}{G_\rho\big(k(r)\big)} K_{ext}.$$

Tomemos ahora, por ejemplo, la función $G(\rho) = \rho^4 e^{\rho^4}$ e impongamos que la curvatura extrínseca de Σ sea constantemente -1.

Por ser r el parámetro arco de la generatriz se verifica

$$k'(r)^2 + z'(r)^2 = 1.$$

Si derivamos la ecuación anterior, la ecuación de la curvatura extrínseca del grafo se puede reescribir así

$$k''(r) = -\frac{2G\big(k(r)\big)}{G_\rho\big(k(r)\big)} K_{ext}.$$

Tomemos ahora, por ejemplo, la función $G(\rho) = \rho^4 e^{\rho^4}$ e impongamos que la curvatura extrínseca de Σ sea constantemente -1.
Bajo estas condiciones, la ecuación anterior se transforma en la siguiente EDO para k

$$k''(r) = \frac{k(r)}{2\left(1 + k(r)^4\right)}$$

Por ser r el parámetro arco de la generatriz se verifica

$$k'(r)^2 + z'(r)^2 = 1.$$

Si derivamos la ecuación anterior, la ecuación de la curvatura extrínseca del grafo se puede reescribir así

$$k''(r) = -\frac{2G\big(k(r)\big)}{G_\rho\big(k(r)\big)} K_{ext}.$$

Tomemos ahora, por ejemplo, la función $G(\rho) = \rho^4 e^{\rho^4}$ e impongamos que la curvatura extrínseca de Σ sea constantemente -1.
Bajo estas condiciones, la ecuación anterior se transforma en la siguiente EDO para k

$$k''(r) = \frac{k(r)}{2\left(1 + k(r)^4\right)}$$

Sea ahora $k(r)$ una solución de la última EDO, con las condiciones iniciales $k(0) = k_0 > 0$, $k'(0) = 0$, donde k_0 es positivo.

⋆ De la unicidad del PVI anterior, k es una función par.

- ⋆ De la unicidad del PVI anterior, k es una función par.
- ⋆ De la EDO, k verifica

$$k'(r)^2 = c_0 + \frac{1}{2}\arctan\left(k(r)^2\right).$$

Si tomamos $k_0 > 0$ suficientemente pequeño, se tiene que $|k'(r)| < 1$ para todo $r \in \mathbb{R}$. Entonces, por la ecuación del parámetro arco, $z(r)$ es una función diferenciable que está bien definida en $\mathbb{R}$.

- De la unicidad del PVI anterior, k es una función par.
- De la EDO, k verifica

$$k'(r)^2 = c_0 + \frac{1}{2}\arctan\left(k(r)^2\right).$$

Si tomamos $k_0 > 0$ suficientemente pequeño, se tiene que $|k'(r)| < 1$ para todo $r \in \mathbb{R}$. Entonces, por la ecuación del parámetro arco, $z(r)$ es una función diferenciable que está bien definida en $\mathbb{R}$.
- Como k es positiva alrededor del 0, de la EDO se deduce que k'' tiene signo positivo y por lo tanto es una función globalmente convexa, luego $k(r) \geq k(0) = k_0 > 0$ para todo $r \in \mathbb{R}$ y entonces Σ está propiamente inmersa en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$.

- ⋆ De la unicidad del PVI anterior, k es una función par.
- ⋆ De la EDO, k verifica

$$k'(r)^2 = c_0 + \frac{1}{2}\arctan\left(k(r)^2\right).$$

  Si tomamos $k_0 > 0$ suficientemente pequeño, se tiene que $|k'(r)| < 1$ para todo $r \in \mathbb{R}$. Entonces, por la ecuación del parámetro arco, $z(r)$ es una función diferenciable que está bien definida en $\mathbb{R}$.
- ⋆ Como k es positiva alrededor del 0, de la EDO se deduce que k'' tiene signo positivo y por lo tanto es una función globalmente convexa, luego $k(r) \geq k(0) = k_0 > 0$ para todo $r \in \mathbb{R}$ y entonces Σ está propiamente inmersa en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$.
- ⋆ Como $k(r) \geq k_0 > 0$ para todo $r \in \mathbb{R}$, podemos cambiar la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ por ejemplo para $0 \leq \rho < \frac{k_0}{2}$, y tendríamos una métrica completa en $\mathbb{M}^2$ bien definida en el origen y tal que Σ preserva la misma métrica inducida.

- De la unicidad del PVI anterior, k es una función par.
- De la EDO, k verifica

$$k'(r)^2 = c_0 + \frac{1}{2}\arctan\left(k(r)^2\right).$$

Si tomamos $k_0 > 0$ suficientemente pequeño, se tiene que $|k'(r)| < 1$ para todo $r \in \mathbb{R}$. Entonces, por la ecuación del parámetro arco, $z(r)$ es una función diferenciable que está bien definida en $\mathbb{R}$.
- Como k es positiva alrededor del 0, de la EDO se deduce que k'' tiene signo positivo y por lo tanto es una función globalmente convexa, luego $k(r) \geq k(0) = k_0 > 0$ para todo $r \in \mathbb{R}$ y entonces Σ está propiamente inmersa en $\mathbb{M}^2 \times \mathbb{R}$.
- Como $k(r) \geq k_0 > 0$ para todo $r \in \mathbb{R}$, podemos cambiar la métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ por ejemplo para $0 \leq \rho < \frac{k_0}{2}$, y tendríamos una métrica completa en $\mathbb{M}^2$ bien definida en el origen y tal que Σ preserva la misma métrica inducida.
- Como Σ está propiamente inmersa, entonces Σ es una superficie completa con $K_{ext} \equiv -1 < 0$.

Muchas gracias por su atención.