Sobre las extensiones α-centrales universales

Natália Pacheco Rego

Universidad de Vigo

Congreso de Jóvenes Investigadores
Sevilla 2013

1 Álgebras Hom-Leibniz

1. Álgebras Hom-Leibniz
2. Hom-(co)-representación de álgebras Hom-Leibniz
3. Homología de álgebras Hom-Leibniz
4. Extensiones centrales universales de álgebras Hom-Leibniz
5. Relación entre extensiones α-centrales universales

Álgebras Hom-Leibniz

Definición

Un álgebra Hom-Leibniz es un triple $(L, [-,-], \alpha)$ *consistente en un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial L, una aplicación bilineal* $[-,-] : L \times L \to L$ *y una aplicación* $\mathbb{K}$*-lineal* $\alpha : L \to L$ *satisfaciendo:*

$$[\alpha(x), [y, z]] = [[x, y], \alpha(z)] - [[x, z], \alpha(y)]$$

para todo $x, y, z \in L$*.*

Álgebras Hom-Leibniz

Definición

Un álgebra Hom-Leibniz es un triple $(L, [-,-], \alpha)$ *consistente en un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial L, una aplicación bilineal* $[-,-] : L \times L \to L$ *y una aplicación* $\mathbb{K}$*-lineal* $\alpha : L \to L$ *satisfaciendo:*

$$[\alpha(x), [y, z]] = [[x, y], \alpha(z)] - [[x, z], \alpha(y)]$$

para todo $x, y, z \in L$.

Definición

Un álgebra Hom-Leibniz se dice que es multiplicativa si la aplicación $\mathbb{K}$*-lineal* α *verifica* $\alpha[x, y] = [\alpha(x), \alpha(y)]$*, para todo* $x, y \in L$.

Álgebras Hom-Leibniz

Ejemplos

a) *Las álgebras Hom-Lie son álgebras Hom-Leibniz tales que* $[x, x] = 0$*, para todo* x*. Para cada álgebra Hom-Leibniz multiplicativa* $(L, [-, -], \alpha_L)$ *hay asociada el álgebra Hom-Lie* $(L_{\mathrm{Lie}}, [-, -], \widetilde{\alpha})$*, donde* $L_{\mathrm{Lie}} = L/L^{\mathrm{ann}}$*, el corchete es el corchete canónico inducido sobre el cociente. Aquí* $L^{\mathrm{ann}} = \langle \{[x, x] : x \in L\} \rangle$*.*

Álgebras Hom-Leibniz

Ejemplos

a) *Las álgebras Hom-Lie son álgebras Hom-Leibniz tales que* $[x, x] = 0$, *para todo* x. *Para cada álgebra Hom-Leibniz multiplicativa* $(L, [-,-], \alpha_L)$ *hay asociada el álgebra Hom-Lie* $(L_{\mathrm{Lie}}, [-,-], \widetilde{\alpha})$, *donde* $L_{\mathrm{Lie}} = L/L^{\mathrm{ann}}$, *el corchete es el corchete canónico inducido sobre el cociente. Aquí* $L^{\mathrm{ann}} = \langle\{[x, x] : x \in L\}\rangle$.

b) *Las álgebras Hom-Leibniz abelianas o conmutativas son* $\mathbb{K}$*-espacios vectoriales* L *con corchete trivial y cualquier aplicación lineal* $\alpha_L : L \to L$.

Álgebras Hom-Leibniz

Definición

Un homomorfismo de álgebras Hom-Leibniz $f : (L, [-,-], \alpha_L) \to (L', [-,-]', \alpha_{L'})$ *es una aplicación* $\mathbb{K}$*-lineal* $f : L \to L'$ *tal que*

a) $f([x,y]) = [f(x), f(y)]'$

b) $f\alpha_L(x) = \alpha_{L'} f(x)$

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_L"'] & L' \arrow[d, "\alpha_{L'}"] \\ L \arrow[r, "f"] & L' \end{tikzcd}$$

para todo $x, y \in L$.

Álgebras Hom-Leibniz

Definición

Sea $(L, [-,-], \alpha_L)$ *una álgebra Hom-Leibniz. Una subálgebra Hom-Leibniz es un subespacio vectorial H de L, que es cerrado para el corchete e invariante por* α_L*, es decir,*

a) $[x, y] \in H$, *para todo* $x, y \in H$

b) $\alpha_L(x) \in H$, *para todo* $x \in H$

Álgebras Hom-Leibniz

Definición

Una subálgebra Hom-Leibniz H de L se dice que es un Hom-ideal bilátero si $[x, y], [y, x] \in H$*, para todo* $x \in H, y \in L$*.*

Si H es un Hom-ideal bilátero de L, entonces el cociente L/H *hereda naturalmente una estructura de álgebra Hom-Leibniz, que se denomina álgebra Hom-Leibniz cociente.*

Hom-(co)-representación de álgebras Hom-Leibniz

Definición

Una Hom-co-representación de una álgebra Hom-Leibniz $(L, [-,-], \alpha_L)$ *es un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial M junto con dos aplicaciones bilineales* $\lambda : L \otimes M \to M, \lambda(l \otimes m) = l \centerdot m$, *y* $\rho : M \otimes L \to M, \rho(m \otimes l) = m \centerdot l$, *y una aplicación* $\mathbb{K}$*-lineal* $\alpha_M : M \to M$ *satisfaciendo las siguientes identidades:*

a) $[x, y] \centerdot \alpha_M(m) = \alpha_L(x) \centerdot (y \centerdot m) - \alpha_L(y) \centerdot (x \centerdot m)$.

b) $\alpha_L(y) \centerdot (m \centerdot x) = (y \centerdot m) \centerdot \alpha_L(x) - \alpha_M(m) \centerdot [x, y]$.

c) $(m \centerdot x) \centerdot \alpha_L(y) = \alpha_M(m) \centerdot [x, y] - (y \centerdot m) \centerdot \alpha_L(x)$.

d) $\alpha_M(x \centerdot m) = \alpha_L(x) \centerdot \alpha_M(m)$

e) $\alpha_M(m \centerdot x) = \alpha_M(m) \centerdot \alpha_L(x)$

para todo $x, y \in L$ *y* $m \in M$

Hom-(co)-representación de álgebras Hom-Leibniz

Ejemplos

a) *Sea M una co-representación del álgebra de Leibniz L. Entonces (M, Id_M) es una Hom-co-representación del álgebra Hom-Leibniz (L, Id_L).*

b) *Cada álgebra Hom-Leibniz $(L, [-,-], \alpha_L)$ tiene una estructura de Hom-co-representación sobre si misma dada por las acciones*

$$x \centerdot m = -[m, x]; \quad m \centerdot y = [m, y]$$

donde $x \in L$ y m es un elemento del $\mathbb{K}$-espacio vectorial subyacente a L.

Homología de álgebras Hom-Leibniz

Sea $(L, [-,-], \alpha_L)$ una álgebra Hom-Leibniz y (M, α_M) una Hom-co-representación de $(L, [-,-], \alpha_L)$. Denotemos por $CL_n^\alpha(L, M) := M \otimes L^{\otimes n}, n \geq 0$. Definimos la aplicación $\mathbb{K}$-lineal

$$d_n : CL_n^\alpha(L, M) \to CL_{n-1}^\alpha(L, M)$$

por

$$d_n(m \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = m \centerdot x_1 \otimes \alpha_L(x_2) \otimes \cdots \otimes \alpha_L(x_n) +$$

$$\sum_{i=2}^{n} (-1)^i x_i \centerdot m \otimes \alpha_L(x_1) \otimes \cdots \otimes \widehat{\alpha_L(x_i)} \otimes \cdots \otimes \alpha_L(x_n) +$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{j+1} \alpha_M(m) \otimes \alpha_L(x_1) \otimes \cdots \otimes \alpha_L(x_{i-1}) \otimes [x_i, x_j] \otimes \cdots \otimes \widehat{\alpha_L(x_j)}$$

$$\otimes \cdots \otimes \alpha_L(x_n)$$

Homología de álgebras Hom-Leibniz

Gracias a las fórmula de Cartan tenemos que $d_n \cdot d_{n+1} = 0, n \geq 0$, por lo que $(CL_\star^\alpha(L, M), d_\star)$ es un complejo de cadenas bien definido, cuya homología se llama la homología del álgebra Hom-Leibniz $(L, [-,-], \alpha_L)$ con coeficientes en la Hom-co-representación (M, α_M) y la denotaremos por:

$$HL_\star^\alpha(L, M) := H_\star(CL_\star^\alpha(L, M), d_\star)$$

Extensiones centrales universales

Las categorías clásicas como grupos, álgebras de Lie, álgebras de Leibniz y otras similares comparten la propiedad común de que las extensiones centrales universales están caracterizadas por los siguientes resultados:

Extensiones centrales universales

Las categorías clásicas como grupos, álgebras de Lie, álgebras de Leibniz y otras similares comparten la propiedad común de que las extensiones centrales universales están caracterizadas por los siguientes resultados:

a) Un algebra es perfecta ($L = [L, L]$)$\Leftrightarrow$ admite una extensión central universal.

Extensiones centrales universales

Las categorías clásicas como grupos, álgebras de Lie, álgebras de Leibniz y otras similares comparten la propiedad común de que las extensiones centrales universales están caracterizadas por los siguientes resultados:

a) Un algebra es perfecta ($L = [L, L]$)$\Leftrightarrow$ admite una extensión central universal.

b) $(K) : 0 \to M \xrightarrow{i} K \xrightarrow{\pi} L \to 0$ es universal $\Leftrightarrow$ K es perfecta y toda extensión central $0 \to N \xrightarrow{j} G \xrightarrow{p} K \to 0$ es rota.

Extensiones centrales universales

Las categorías clásicas como grupos, álgebras de Lie, álgebras de Leibniz y otras similares comparten la propiedad común de que las extensiones centrales universales están caracterizadas por los siguientes resultados:

a) Un algebra es perfecta ($L = [L, L]$)$\Leftrightarrow$ admite una extensión central universal.

b) $(K) : 0 \to M \xrightarrow{i} K \xrightarrow{\pi} L \to 0$ es universal $\Leftrightarrow$ K es perfecta y toda extensión central $0 \to N \xrightarrow{j} G \xrightarrow{p} K \to 0$ es rota.

c) $(K) : 0 \to M \xrightarrow{i} K \xrightarrow{\pi} L \to 0$ es una extensión central universal $\Leftrightarrow H_1(K) = H_2(K) = 0$

Extensiones centrales universales

Para poder probar estas caracterizaciones es absolutamente imprescindible utilizar el hecho de que la composición de dos extensiones centrales es una también extensión central.

Extensiones centrales universales

Para poder probar estas caracterizaciones es absolutamente imprescindible utilizar el hecho de que la composición de dos extensiones centrales es una también extensión central.

Desafortunadamente esta propiedad no se mantiene en la categoría de álgebras Hom-Leibniz tal y como demostrará en el contraejemplo.

Extensiones centrales universales

Para poder probar estas caracterizaciones es absolutamente imprescindible utilizar el hecho de que la composición de dos extensiones centrales es una también extensión central.

Desafortunadamente esta propiedad no se mantiene en la categoría de álgebras Hom-Leibniz tal y como demostrará en el contraejemplo.

Este inconveniente provoca la definición de extensiones α-centrales, cuyas propiedades relativas a la composición se determinarán a continuación.

Extensiones centrales universales

Definición

Una sucesión exacta corta de álgebras Hom-Leibniz $(K) : 0 \to (M, \alpha_M) \xrightarrow{i} (K, \alpha_K) \xrightarrow{\pi} (L, \alpha_L) \to 0$ *se dice que es central si* $[M, K] = 0 = [K, M]$. *Equivalentemente,* $M \subseteq Z(K)$.

Extensiones centrales universales

Definición

Una sucesión exacta corta de álgebras Hom-Leibniz $(K) : 0 \to (M, \alpha_M) \xrightarrow{i} (K, \alpha_K) \xrightarrow{\pi} (L, \alpha_L) \to 0$ *se dice que es central si* $[M, K] = 0 = [K, M]$. *Equivalentemente,* $M \subseteq Z(K)$. *Decimos que* (K) *es* α*-central si* $[\alpha_M(M), K] = 0 = [K, \alpha_M(M)]$ *. Equivalentemente,* $\alpha_M(M) \subseteq Z(K)$.

Extensiones centrales universales

Definición

Una sucesión exacta corta de álgebras Hom-Leibniz $(K) : 0 \to (M, \alpha_M) \xrightarrow{i} (K, \alpha_K) \xrightarrow{\pi} (L, \alpha_L) \to 0$ *se dice que es central si* $[M, K] = 0 = [K, M]$*. Equivalentemente,* $M \subseteq Z(K)$*. Decimos que* (K) *es* α*-central si* $[\alpha_M(M), K] = 0 = [K, \alpha_M(M)]$ *. Equivalentemente,* $\alpha_M(M) \subseteq Z(K)$*.*

Nota

Obviamente, cada extensión central es una extensión α*-central. Nótese que en el caso* $\alpha_M = Id_M$*, ambas nociones coinciden.*

Extensiones centrales universales

Ejemplo

Consideremos el álgebra Hom-Leibniz bidimensional (L, α_L) *con base* $\{b_1, b_2\}$*, corchete dado por* $[b_2, b_1] = b_2, [b_2, b_2] = b_1$ *y endomorfismo* $\alpha_L = 0$*.*

Extensiones centrales universales

Ejemplo

Consideremos el álgebra Hom-Leibniz bidimensional (L, α_L) *con base* $\{b_1, b_2\}$*, corchete dado por* $[b_2, b_1] = b_2, [b_2, b_2] = b_1$ *y endomorfismo* $\alpha_L = 0$*.*

Sea (K, α_K) *el álgebra Hom-Leibniz tridimensional con base* $\{a_1, a_2, a_3\}$*, corchete dado por* $[a_2, a_2] = a_1, [a_3, a_2] = a_3, [a_3, a_3] = a_2$ *y endomorfismo* $\alpha_K = 0$*.*

Extensiones centrales universales

Ejemplo

Consideremos el álgebra Hom-Leibniz bidimensional (L, α_L) *con base* $\{b_1, b_2\}$, *corchete dado por* $[b_2, b_1] = b_2, [b_2, b_2] = b_1$ *y endomorfismo* $\alpha_L = 0$.

Sea (K, α_K) *el álgebra Hom-Leibniz tridimensional con base* $\{a_1, a_2, a_3\}$, *corchete dado por* $[a_2, a_2] = a_1, [a_3, a_2] = a_3, [a_3, a_3] = a_2$ *y endomorfismo* $\alpha_K = 0$.

Evidentemente (K, α_K) *es perfecta y* $Z((K, \alpha_K)) =< \{a_1\} >$.

Extensiones centrales universales

Ejemplo

La aplicación lineal $\pi : (K, 0) \to (L, 0)$ *dada por* $\pi(a_1) = 0, \pi(a_2) = b_1, \pi(a_3) = b_2$ *es una extensión central ya que trivialmente* π *es sobreyectiva y es un homomorfismo de álgebras Hom-Leibniz.*

Extensiones centrales universales

Ejemplo

La aplicación lineal $\pi : (K, 0) \to (L, 0)$ *dada por* $\pi(a_1) = 0, \pi(a_2) = b_1, \pi(a_3) = b_2$ *es una extensión central ya que trivialmente* π *es sobreyectiva y es un homomorfismo de álgebras Hom-Leibniz.*

Obviamente, $0\ \pi = \pi\ 0$ *y* $Ker(\pi) =< \{a_1\} >$*, por lo que* $Ker(\pi) \subseteq Z((K, \alpha_K))$*.*

Extensiones centrales universales

Ejemplo

La aplicación lineal $\pi : (K, 0) \to (L, 0)$ *dada por* $\pi(a_1) = 0, \pi(a_2) = b_1, \pi(a_3) = b_2$ *es una extensión central ya que trivialmente* π *es sobreyectiva y es un homomorfismo de álgebras Hom-Leibniz.*

Obviamente, $0 \ \pi = \pi \ 0$ *y* $Ker(\pi) =< \{a_1\} >$*, por lo que* $Ker(\pi) \subseteq Z((K, \alpha_K))$*.*

Consideremos el álgebra Hom-Leibniz de dimensión 4 (F, α_F) *con base* $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$*, corchete dado por* $[e_3, e_2] = e_1, [e_3, e_3] = e_2, [e_4, e_3] = e_4, [e_4, e_4] = e_3$ *y endomorfismo* $\alpha_F = 0$*.*

Extensiones centrales universales

Ejemplo

La aplicación lineal $\rho : (F, 0) \to (K, 0)$ *dada por* $\rho(e_1) = 0, \rho(e_2) = a_1, \rho(e_3) = a_2, \rho(e_4) = a_3$*, es una extensión central*

Extensiones centrales universales

Ejemplo

La aplicación lineal $\rho : (F, 0) \to (K, 0)$ *dada por* $\rho(e_1) = 0, \rho(e_2) = a_1, \rho(e_3) = a_2, \rho(e_4) = a_3$*, es una extensión central*

Obviamente, $0\ \rho = \rho\ 0$*,* $Ker(\rho) =< \{e_1\} >$ *y* $Z((F, \alpha_F)) =< \{e_1\} >$*, por lo que* $Ker(\rho) \subseteq Z((F, \alpha_F))$*.*

Extensiones centrales universales

Ejemplo

La aplicación lineal $\rho : (F, 0) \to (K, 0)$ *dada por* $\rho(e_1) = 0, \rho(e_2) = a_1, \rho(e_3) = a_2, \rho(e_4) = a_3$*, es una extensión central*

Obviamente, $0\ \rho = \rho\ 0$*,* $Ker(\rho) =< \{e_1\} >$ *y* $Z((F, \alpha_F)) =< \{e_1\} >$*, por lo que* $Ker(\rho) \subseteq Z((F, \alpha_F))$*.*

La composición $\pi\ \rho : (F, 0) \to (L, 0)$ *está dada por* $\pi\rho(e_1) = \pi(0) = 0, \pi\rho(e_2) = \pi(a_1) = 0, \pi\rho(e_3) = \pi(a_2) = b_1, \pi\rho(e_4) = \pi(a_3) = b_2$*.*

Extensiones centrales universales

Ejemplo

$$\begin{tikzcd}
(F,0) \arrow[d, "\rho"] \arrow[dr, dashed, "\pi\cdot\rho"] & \\
(K,0) \arrow[r, two heads, "\pi"] & (L,0)
\end{tikzcd}$$

En consecuencia, $\pi\ \rho : (F,0) \to (L,0)$ *es un homomorfismo sobreyectivo, pero no es una extensión central, puesto que* $Z((F,0)) =< \{e_1\} >$ *y* $Ker(\pi\ \rho) =< \{e_1, e_2\} >$*, es decir* $Ker(\pi\ \rho) \nsubseteq Z((F,0))$*.*

Extensiones centrales universales

Definición

Una extensión central
$(K): 0 \to (M, \alpha_M) \xrightarrow{i} (K, \alpha_K) \xrightarrow{\pi} (L, \alpha_L) \to 0$ *se dice que es universal si para cada extensión central*
$(K'): 0 \to (M', \alpha_{M'}) \xrightarrow{i'} (K', \alpha_{K'}) \xrightarrow{\pi'} (L, \alpha_L) \to 0$ *existe un único homomorfismo de álgebras Hom-Leibniz*
$h: (K, \alpha_K) \to (K', \alpha_{K'})$ *tal que* $\pi' h = \pi$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (M, \alpha_M) \arrow[r] & (K, \alpha_K) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, dashed, "\exists! h"] & (L, \alpha_L) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & (M', \alpha_{M'}) \arrow[r] & (K', \alpha_{K'}) \arrow[r, "\pi'"] & (L, \alpha_L) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Extensiones centrales universales

Definición

Decimos que la extensión central $(K): 0 \to (M, \alpha_M) \xrightarrow{i} (K, \alpha_K) \xrightarrow{\pi} (L, \alpha_L) \to 0$ *es* α*-central universal si para cada extensión* α*-central* $(K'): 0 \to (M', \alpha_{M'}) \xrightarrow{i'} (K', \alpha_{K'}) \xrightarrow{\pi'} (L, \alpha_L) \to 0$ *existe un único homomorfismo de álgebras Hom-Leibniz* $h: (K, \alpha_K) \to (K', \alpha_{K'})$ *tal que* $\pi' h = \pi$.

Nota

Obviamente, cada extensión α*-central universal es una extensión central universal. Nótese que en el caso* $\alpha_M = Id_M$*, ambas nociones coinciden.*

Extensiones centrales universales

Definición

Decimos que una álgebra Hom-Leibniz (L, α_L) *es perfecta si* $L = [L, L]$.

Extensiones centrales universales

Definición

Decimos que una álgebra Hom-Leibniz (L, α_L) *es perfecta si* $L = [L, L]$.

Resultados preliminares para el Teorema de reconocimento

Extensiones centrales universales

Definición

Decimos que una álgebra Hom-Leibniz (L, α_L) es perfecta si $L = [L, L]$.

Resultados preliminares para el Teorema de reconocimento

Debido al problema principal de que la composición de extensiones centrales no es una extensión central, verificamos que los resultados clasicos obtenidos no se reproducen completamente para algebra Hom-Leibniz.

Extensiones centrales universales

Definición

Decimos que una álgebra Hom-Leibniz (L, α_L) es perfecta si $L = [L, L]$.

Resultados preliminares para el Teorema de reconocimento

Debido al problema principal de que la composición de extensiones centrales no es una extensión central, verificamos que los resultados clasicos obtenidos no se reproducen completamente para algebra Hom-Leibniz.

En particular, nos verificamos que hay un conjunto de equivalencias que se pierden, convirtiéndose en implicaciones unilaterales.

Extensiones centrales universales

Lema

Sea $\pi : (K, \alpha_K) \to (L, \alpha_L)$ *un epimorfismo de álgebras Hom-Leibniz. Si* (K, α_K) *es una álgebra Hom-Leibniz perfecta, entonces* (L, α_L) *también lo es.*

Extensiones centrales universales

Lema

Sea $\pi : (K, \alpha_K) \to (L, \alpha_L)$ *un epimorfismo de álgebras Hom-Leibniz. Si* (K, α_K) *es una álgebra Hom-Leibniz perfecta, entonces* (L, α_L) *también lo es.*

Lema

Sea $0 \to (M, \alpha_M) \xrightarrow{i} (K, \alpha_K) \xrightarrow{\pi} (L, \alpha_L) \to 0$ *una extensión central y* (K, α_K) *una álgebra Hom-Leibniz perfecta. Si existe un homomorfismo de álgebras Hom-Leibniz* $f : (K, \alpha_K) \to (A, \alpha_A)$ *tal que* $\tau f = \pi$*, donde* $0 \to (N, \alpha_N) \xrightarrow{j} (A, \alpha_A) \xrightarrow{\tau} (L, \alpha_L) \to 0$ *es una extensión central, entonces* f *es único.*

Extensiones centrales universales

Lema

Si $0 \to (M, \alpha_M) \xrightarrow{i} (K, \alpha_K) \xrightarrow{\pi} (L, \alpha_L) \to 0$ *es una extensión central universal, entonces* (K, α_K) *y* (L, α_L) *son álgebras Hom-Leibniz perfectas.*

Extensiones centrales universales

Lema

Si $0 \to (M, \alpha_M) \stackrel{i}{\to} (K, \alpha_K) \stackrel{\pi}{\to} (L, \alpha_L) \to 0$ *es una extensión central universal, entonces* (K, α_K) *y* (L, α_L) *son álgebras Hom-Leibniz perfectas.*

Lema

Sean $0 \to (M, \alpha_M) \stackrel{i}{\to} (K, \alpha_K) \stackrel{\pi}{\to} (L, \alpha_L) \to 0$ *y* $0 \to (N, \alpha_N) \stackrel{j}{\to} (F, \alpha_F) \stackrel{\rho}{\to} (K, \alpha_K) \to 0$ *extensiones centrales con* (K, α_K) *una álgebra Hom-Leibniz perfecta. Entonces la extensión composición* $0 \to (P, \alpha_P) = \mathrm{Ker}\ (\pi\rho) \to (F, \alpha_F) \stackrel{\pi\rho}{\to} (L, \alpha_L) \to 0$ *es una extensión* α*-central.*

Extensiones centrales universales

Lema

$$
\begin{tikzcd}
(F, \alpha_F) \arrow[d, "\rho"] \arrow[dr, dashed, "\pi \cdot \rho"] & \\
(K, \alpha_K) \arrow[r, two heads, "\pi"] & (L, \alpha_L)
\end{tikzcd}
$$

Extensiones centrales universales

Lema

$$\begin{tikzcd} (F, \alpha_F) \arrow[d, "\rho"] \arrow[dr, dashed, "\pi \cdot \rho"] & \\ (K, \alpha_K) \arrow[r, two heads, "\pi"] & (L, \alpha_L) \end{tikzcd}$$

Además, si $0 \to (M, \alpha_M) \xrightarrow{i} (K, \alpha_K) \xrightarrow{\pi} (L, \alpha_L) \to 0$ *es una extensión* α*-central universal, entonces* $0 \to (N, \alpha_N) \xrightarrow{j} (F, \alpha_F) \xrightarrow{\rho} (K, \alpha_K) \to 0$ *es rota.*

Extensiones centrales universales

Teorema

a) *Si una extensión central* $0 \to (M, \alpha_M) \xrightarrow{i} (K, \alpha_K) \xrightarrow{\pi} (L, \alpha_L) \to 0$ *es una extensión* α*-central universal, entonces* (K, α_K) *es una álgebra Hom-Leibniz perfecta y cada extensión central de* (K, α_K) *es rota.*

Extensiones centrales universales

Teorema

a) *Si una extensión central* $0 \to (M, \alpha_M) \xrightarrow{i} (K, \alpha_K) \xrightarrow{\pi} (L, \alpha_L) \to 0$ *es una extensión* α*-central universal, entonces* (K, α_K) *es una álgebra Hom-Leibniz perfecta y cada extensión central de* (K, α_K) *es rota.*

b) *Sea* $0 \to (M, \alpha_M) \xrightarrow{i} (K, \alpha_K) \xrightarrow{\pi} (L, \alpha_L) \to 0$ *una extensión central.*
Si (K, α_K) *es una álgebra Hom-Leibniz perfecta y cada extensión central de* (K, α_K) *es rota, entonces* $0 \to (M, \alpha_M) \xrightarrow{i} (K, \alpha_K) \xrightarrow{\pi} (L, \alpha_L) \to 0$ *es una extensión central universal.*

Extensiones centrales universales

Teorema

c) *Una álgebra Hom-Leibniz* (L, α_L) *admite una extensión central universal si, y sólo si,* (L, α_L) *es perfecta.*

Extensiones centrales universales

Teorema

c) *Una álgebra Hom-Leibniz* (L, α_L) *admite una extensión central universal si, y sólo si,* (L, α_L) *es perfecta.*

d) *El núcleo de la extensión central universal es canónicamente isomorfa a* $HL_2^{\alpha}(L)$*.*

Extensiones centrales universales

Teorema

c) *Una álgebra Hom-Leibniz* (L, α_L) *admite una extensión central universal si, y sólo si,* (L, α_L) *es perfecta.*

d) *El núcleo de la extensión central universal es canónicamente isomorfa a* $HL_2^\alpha(L)$*.*

Demostración

c) y d)

- Para una álgebra Hom-Leibniz (L, α_L) consideremos el complejo de cadenas de homología $CL_\star^\alpha(L)$ que es $CL_\star^\alpha(L, \mathbb{K})$ en el que $\mathbb{K}$ está dotado con una estructura de Hom-co-representación trivial.

Extensiones centrales universales

Teorema

c) *Una álgebra Hom-Leibniz (L, α_L) admite una extensión central universal si, y sólo si, (L, α_L) es perfecta.*

d) *El núcleo de la extensión central universal es canónicamente isomorfa a $HL_2^\alpha(L)$.*

Demostración

c) y d)

- Para una álgebra Hom-Leibniz (L, α_L) consideremos el complejo de cadenas de homología $CL_\star^\alpha(L)$ que es $CL_\star^\alpha(L, \mathbb{K})$ en el que $\mathbb{K}$ está dotado con una estructura de Hom-co-representación trivial.

Extensiones centrales universales

Demostración

- Sea I_L el subespacio de $L \otimes L$ generado por los elementos $-[x_1, x_2] \otimes \alpha_L(x_3) + [x_1, x_3] \otimes \alpha_L(x_2) + \alpha_L(x_1) \otimes [x_2, x_3], x_1, x_2, x_3 \in L$. Es decir, $I_L = \mathrm{Im}\ \big(d_3 : CL_3^{\alpha}(L) \to CL_2^{\alpha}(L)\big)$.

Extensiones centrales universales

Demostración

- Sea I_L el subespacio de $L \otimes L$ generado por los elementos $-[x_1, x_2] \otimes \alpha_L(x_3) + [x_1, x_3] \otimes \alpha_L(x_2) + \alpha_L(x_1) \otimes [x_2, x_3]$, $x_1, x_2, x_3 \in L$. Es decir, $I_L = \mathrm{Im}\ \left(d_3 : CL_3^{\alpha}(L) \to CL_2^{\alpha}(L)\right)$.

- Denotamos $\frac{L \otimes L}{I_L}$ por $\mathfrak{uce}(L)$. Cada clase $x_1 \otimes x_2 + I_L$ se denota por $\{x_1, x_2\}$, para todo $x_1, x_2 \in L$.

Extensiones centrales universales

Demostración

- Sea I_L el subespacio de $L \otimes L$ generado por los elementos $-[x_1, x_2] \otimes \alpha_L(x_3) + [x_1, x_3] \otimes \alpha_L(x_2) + \alpha_L(x_1) \otimes [x_2, x_3], x_1, x_2, x_3 \in L$. Es decir, $I_L = \mathrm{Im}\ \left(d_3 : CL_3^{\alpha}(L) \to CL_2^{\alpha}(L)\right)$.
- Denotamos $\frac{L \otimes L}{I_L}$ por $\mathfrak{uce}(L)$. Cada clase $x_1 \otimes x_2 + I_L$ se denota por $\{x_1, x_2\}$, para todo $x_1, x_2 \in L$.
- $(\mathfrak{uce}(L), \widetilde{\alpha})$, donde $\widetilde{\alpha} : \mathfrak{uce}(L) \to \mathfrak{uce}(L)$ está definida por $\widetilde{\alpha}(\{x_1, x_2\}) = \{\alpha_L(x_1), \alpha_L(x_2)\}$, es una álgebra Hom-Leibniz con respecto al corchete $[\{x_1, x_2\}, \{y_1, y_2\}] = \{[x_1, x_2], [y_1, y_2]\}$

Extensiones centrales universales

- Por construcción, se obtiene la siguiente identidad:

$$\{\alpha_L(x_1),[x_2,x_3]\}=\{[x_1,x_2],\alpha_L(x_3)\}-\{[x_1,x_3],\alpha_L(x_2)\} \quad (1)$$

Extensiones centrales universales

- Por construcción, se obtiene la siguiente identidad:

$$\{\alpha_L(x_1),[x_2,x_3]\}=\{[x_1,x_2],\alpha_L(x_3)\}-\{[x_1,x_3],\alpha_L(x_2)\} \quad (1)$$

$$\begin{tikzcd}
& Im(d_3)=I_L \arrow[dr, hook] \arrow[drrr, dashed, "0"] & & & \\
CL_3^{\alpha}(L)=L^{\otimes 3} \arrow[ur, two heads] \arrow[rr, "d_3"] & & CL_2^{\alpha}(L)=L^{\otimes 2} \arrow[rr, "d_2"] \arrow[dr, two heads] & & CL_1^{\alpha}(L)=L \\
& & & \mathfrak{uce}(L) \arrow[ur, dashed, "u_L"] & \\
& & HL_2^{\alpha}(L) \arrow[ur, hook, dashed] & &
\end{tikzcd}$$

Extensiones centrales universales

Demostración

- $d_2(I_L) = 0$, por lo que induce una aplicación $\mathbb{K}$-lineal $u_L : \mathfrak{uce}(L) \to L$, dada por $u_L(\{x_1, x_2\}) = [x_1, x_2]$.

Extensiones centrales universales

Demostración

- $d_2(I_L) = 0$, por lo que induce una aplicación $\mathbb{K}$-lineal $u_L : \mathfrak{uce}(L) \to L$, dada por $u_L(\{x_1, x_2\}) = [x_1, x_2]$.

- $u_L : (\mathfrak{uce}(L), \widetilde{\alpha}) \to (L, \alpha_L)$ es un homomorfismo de álgebras Hom-Leibniz.

Extensiones centrales universales

Demostración

- $d_2(I_L) = 0$, por lo que induce una aplicación $\mathbb{K}$-lineal $u_L : \mathfrak{uce}(L) \to L$, dada por $u_L(\{x_1, x_2\}) = [x_1, x_2]$.
- $u_L : (\mathfrak{uce}(L), \widetilde{\alpha}) \to (L, \alpha_L)$ es un homomorfismo de álgebras Hom-Leibniz.
- De la construcción se sigue que Ker $u_L = HL_2^{\alpha}(L)$, así que tenemos la extensión

$$0 \to (HL_2^{\alpha}(L), \widetilde{\alpha}_|) \to (\mathfrak{uce}(L), \widetilde{\alpha}) \stackrel{u_L}{\to} (L, \alpha_L) \to 0$$

que es una extensión central universal. $\square$

Extensiones centrales universales

Corolario

a) *Sea* $0 \to (M, \alpha_M) \xrightarrow{i} (K, \alpha_K) \xrightarrow{\pi} (L, \alpha_L) \to 0$ *una extensión* α*-central universal, entonces* $HL_1^{\alpha}(K) = HL_2^{\alpha}(K) = 0$.

Extensiones centrales universales

Corolario

a) *Sea* $0 \to (M, \alpha_M) \xrightarrow{i} (K, \alpha_K) \xrightarrow{\pi} (L, \alpha_L) \to 0$ *una extensión* α*-central universal, entonces* $HL_1^{\alpha}(K) = HL_2^{\alpha}(K) = 0$*.*

b) *Sea* $0 \to (M, \alpha_M) \xrightarrow{i} (K, \alpha_K) \xrightarrow{\pi} (L, \alpha_L) \to 0$ *una extensión central tal que* $HL_1^{\alpha}(K) = HL_2^{\alpha}(K) = 0$*, entonces* $0 \to (M, \alpha_M) \xrightarrow{i} (K, \alpha_K) \xrightarrow{\pi} (L, \alpha_L) \to 0$ *es una extensión central universal.*

Relación entre extensiones α-centrales universales

Sea $(L, [-,-], \alpha_L)$ una álgebra Hom-Lie perfecta,entonces $(L, [-,-], \alpha_L)$ admite una extensión central universal en la categoría Hom-Lie de la forma:

$$0 \longrightarrow \left(H_2^{\alpha}(L), \widetilde{\alpha}\right) \longrightarrow \left(\mathfrak{uce}_{Lie}(L), \widetilde{\alpha}\right) \xrightarrow{u_L} (L, \alpha_L) \longrightarrow 0$$

Por otra parte, puesto que una álgebra Hom-Lie perfecta también es una álgebra Hom-Leibniz perfecta, entonces $(L, [-,-], \alpha_L)$ también admite extensión central universal en la categoría Hom-Leib de la forma:

$$0 \longrightarrow \left(HL_2^{\alpha}(L), \widehat{\alpha}\right) \longrightarrow \left(\mathfrak{uce}_{Leib}(L), \widehat{\alpha}\right) \xrightarrow{U_L} (L, \alpha_L) \longrightarrow 0$$

Extensiones α-centrales universales

De Gnedbaye las relaciones entre estas extensiones centrales universales se pueden resumir en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & HL_2(\mathfrak{uce}_{Leib}(L)) \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] & HL_2(\mathfrak{uce}_{Leib}(L)) \arrow[d, tail] & & & \\
0 \arrow[r] & H_2(L) \arrow[r] \arrow[d, two heads] & \mathfrak{uce}_{Lie}(L) \arrow[r, "u_L"] \arrow[d, two heads, "\omega"] & L \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 & (\textbf{Leib}) \\
0 \arrow[r] & HL_2(L) \arrow[r] & \mathfrak{uce}_{Leib}(L) \arrow[r, "U_L"] & L \arrow[r] & 0 & (\textbf{Lie})
\end{tikzcd}$$

Extensiones α-centrales universales

De Gnedbaye las relaciones entre estas extensiones centrales universales se pueden resumir en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & HL_2(\mathfrak{uce}_{Leib}(L)) \arrow[r, equal] \arrow[d, tail] & HL_2(\mathfrak{uce}_{Leib}(L)) \arrow[d, tail] & & & \\
0 \arrow[r] & H_2(L) \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{uce}_{Lie}(L) \arrow[r, "u_L"] \arrow[d, "\omega"] & L \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 & (\textbf{Leib}) \\
0 \arrow[r] & HL_2(L) \arrow[r] & \mathfrak{uce}_{Leib}(L) \arrow[r, "U_L"] & L \arrow[r] & 0 & (\textbf{Lie})
\end{tikzcd}$$

entonces es natural preguntarse por la generalización de estos resultados al contexto de las álgebras Hom-Leibniz.

Extensiones α-centrales universales

Pero de nuevo es necesario hacer uso de la composición de extensiones centrales, lo que impide la generalización total de los resultados mencionadas, siendo posible únicamente obtener resultados en un contexto más restringido de extensiones α-centrales universales.

Extensiones α-centrales universales

Pero de nuevo es necesario hacer uso de la composición de extensiones centrales, lo que impide la generalización total de los resultados mencionadas, siendo posible únicamente obtener resultados en un contexto más restringido de extensiones α-centrales universales.

Comenzamos introduciendo un nuevo concepto de perfección:

Extensiones α-centrales universales

Definición

Una álgebra Hom-Lie (respectivamente, Hom-Leibniz) (L, α_L) *se dice que es* α*-perfecta si*

$$L = [\alpha_L(L), \alpha_L(L)]$$

Extensiones α-centrales universales

Definición

Una álgebra Hom-Lie (respectivamente, Hom-Leibniz) (L, α_L) *se dice que es* α*-perfecta si*

$$L = [\alpha_L(L), \alpha_L(L)]$$

Nota

a) *Cuando* $\alpha_L = Id$*, la noción de* α*-perfección coincide con el de perfección.*

b) *Obviamente, si* $(L, [-,-], \alpha_L)$ *es una álgebra Hom-Lie (respectivamente, Hom-Leibniz)* α*-perfecta, entonces es perfecta. Sin embargo, el recíproco no es cierto.*

Extensiones centrales α-universales

Lema

Sea $0 \to (M, \alpha_M) \xrightarrow{i} (K, \alpha_K) \xrightarrow{\pi} (L, \alpha_L) \to 0$ *una extensión central y* (K, α_K) *una álgebra Hom-Lie (Hom-Leibniz)* α*-perfecta. Si existe un homomorfismo de álgebras Hom-Lie (Hom-Leibniz)* $f : (K, \alpha_K) \to (A, \alpha_A)$ *tal que* $\tau \cdot f = \pi$*, donde* $0 \to (N, \alpha_N) \xrightarrow{j} (A, \alpha_A) \xrightarrow{\tau} (L, \alpha_L) \to 0$ *es una extensión* α*-central, entonces* f *es único.*

Extensiones centrales α-universales

Lema

Sea $0 \to (M, \alpha_M) \xrightarrow{i} (K, \alpha_K) \xrightarrow{\pi} (L, \alpha_L) \to 0$ *una extensión central y* (K, α_K) *una álgebra Hom-Lie (Hom-Leibniz)* α*-perfecta. Si existe un homomorfismo de álgebras Hom-Lie (Hom-Leibniz)* $f : (K, \alpha_K) \to (A, \alpha_A)$ *tal que* $\tau \cdot f = \pi$*, donde* $0 \to (N, \alpha_N) \xrightarrow{j} (A, \alpha_A) \xrightarrow{\tau} (L, \alpha_L) \to 0$ *es una extensión* α*-central, entonces* f *es único.*

Teorema

Una álgebra Hom-Lie (Hom-Leibniz) α*-perfecta admite extensión* α*-central universal.*

Extensiones centrales α-universales

Proposición

$\left(\mathfrak{uce}_{\alpha}^{Leib}(L), \widetilde{\alpha}\right)$ es la extensión central universal del álgebra Hom-Lie α-perfecta $\left(\mathfrak{uce}_{\alpha}^{Lie}(L), \overline{\alpha}\right)$ en la categoría Hom-Leib*. Además hay un isomorfismo de álgebras Hom-Lie*

$$\left(\mathfrak{uce}_{\alpha}^{Lie}(L), \overline{\alpha}\right) \cong \left(\left(\mathfrak{uce}_{\alpha}^{Leib}(L)\right)_{\mathrm{Lie}}, \widetilde{\alpha}_{\mathrm{Lie}}\right).$$

Extensiones centrales α-universales

Demostración.

Por ser (L, α_L) una álgebra Hom-Lie α-perfecta, entonces tenemos la situación descrita en el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\left(Ker\left(U_\alpha\right), \widetilde{\alpha}_|\right) \arrow[r, tail] & \left(\mathfrak{uce}_\alpha^{Leib}(L), \widetilde{\alpha}\right) \arrow[r, two heads, "U_\alpha"] \arrow[d, dashed, "\exists! \Phi"] & (L, \alpha_L) \arrow[d, equal] & (\mathrm{Hom}-\mathrm{Leib}) \\
\left(Ker\left(u_\alpha\right), \overline{\alpha}_|\right) \arrow[r, tail] & \left(\mathfrak{uce}_\alpha^{Lie}(L), \overline{\alpha}\right) \arrow[r, two heads, "u_\alpha"] & (L, \alpha_L) & (\mathrm{Hom}-\mathrm{Lie})
\end{tikzcd}$$

Extensiones centrales α-universales

Se verifica que la extensión

$$0 \to \left(Ker\left(\Phi\right), \widetilde{\alpha}_{|}\right) \to \left(\mathfrak{uce}_{\alpha}^{Leib}\left(L\right), \widetilde{\alpha}\right) \stackrel{\Phi}{\to} \left(\mathfrak{uce}_{\alpha}^{Lie}\left(L\right), \overline{\alpha}\right) \to 0$$

es una extensión central universal en la categoría Hom-Leib.

Extensiones centrales α-universales

Se verifica que la extensión

$$0 \to \left(Ker\left(\Phi\right), \widetilde{\alpha}_{|}\right) \to \left(\mathfrak{uce}_{\alpha}^{Leib}\left(L\right), \widetilde{\alpha}\right) \xrightarrow{\Phi} \left(\mathfrak{uce}_{\alpha}^{Lie}\left(L\right), \overline{\alpha}\right) \to 0$$

es una extensión central universal en la categoría Hom-Leib.

- Por construcción, tenemos que $Ker(\Phi) \subseteq Ker(U_{\alpha}) \subseteq Z\left(\mathfrak{uce}_{\alpha}^{Leib}\left(L\right), \widetilde{\alpha}\right)$.

Extensiones centrales α-universales

Se verifica que la extensión

$$0 \to \left(Ker\left(\Phi\right), \widetilde{\alpha}_{|}\right) \to \left(\mathfrak{uce}_{\alpha}^{Leib}\left(L\right), \widetilde{\alpha}\right) \xrightarrow{\Phi} \left(\mathfrak{uce}_{\alpha}^{Lie}\left(L\right), \overline{\alpha}\right) \to 0$$

es una extensión central universal en la categoría Hom-Leib.

- Por construcción, tenemos que $Ker(\Phi) \subseteq Ker(U_{\alpha}) \subseteq Z\left(\mathfrak{uce}_{\alpha}^{Leib}\left(L\right), \widetilde{\alpha}\right)$.
- Φ es un homomorfismo sobreyectivo.

Extensiones centrales α-universales

Se verifica que la extensión

$$0 \to \left(Ker\left(\Phi\right), \widetilde{\alpha}_{|}\right) \to \left(\mathfrak{uce}_{\alpha}^{Leib}\left(L\right), \widetilde{\alpha}\right) \xrightarrow{\Phi} \left(\mathfrak{uce}_{\alpha}^{Lie}\left(L\right), \overline{\alpha}\right) \to 0$$

es una extensión central universal en la categoría Hom-Leib.

- Por construcción, tenemos que $Ker(\Phi) \subseteq Ker(U_{\alpha}) \subseteq Z\left(\mathfrak{uce}_{\alpha}^{Leib}\left(L\right), \widetilde{\alpha}\right)$.
- Φ es un homomorfismo sobreyectivo.
- Verificamos que se satisfacen las condiciones del Teorema de caracterización *b*):

Extensiones centrales α-universales

- Al ser $U_\alpha : \left(\mathfrak{uce}_\alpha^{Leib}(L), \overline{\alpha}\right) \to (L, \alpha_L)$ una extensión α-central, entonces es una extensión central universal y, por lo tanto $\left(\mathfrak{uce}_\alpha^{Leib}(L), \widetilde{\alpha}\right)$ es perfecta.

Extensiones centrales α-universales

- Al ser $U_\alpha : \left(\mathfrak{uce}_\alpha^{Leib}(L), \overline{\alpha}\right) \to (L, \alpha_L)$ una extensión α-central, entonces es una extensión central universal y, por lo tanto $\left(\mathfrak{uce}_\alpha^{Leib}(L), \widetilde{\alpha}\right)$ es perfecta.
- Verificamos que cualquier extensión cental de la forma $0 \to (P, \alpha_P) \to (K, \alpha_K) \xrightarrow{\rho} \left(\mathfrak{uce}_\alpha^{Leib}(L), \widetilde{\alpha}\right)$ es rota.

Extensiones centrales α-universales

Para ello consideremos la extensión composición $U_\alpha \cdot \rho : (K, \alpha_K) \to (L, \alpha_L)$, que es una extensión $\alpha-$central

$$\begin{tikzcd}
 & (P, \alpha_P) \arrow[d, tail] & \\
 & (K, \alpha_K) \arrow[d, two heads, "\rho"] \arrow[dr, two heads, "U_\alpha \cdot \rho"] & \\
Ker(U_\alpha) \arrow[r, tail] & (\mathfrak{uce}_\alpha^{Leib}(L), \widetilde{\alpha}) \arrow[r, two heads, "U_\alpha"] & (L, \alpha_L)
\end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
 & (P, \alpha_P) \arrow[d, tail] & \\
 & (K, \alpha_K) \arrow[d, two heads, "\rho"'] \arrow[dr, two heads, "U_\alpha \cdot \rho"] & \\
Ker(U_\alpha) \arrow[r, tail] & (\mathfrak{uce}_\alpha^{Leib}(L), \widetilde{\alpha}) \arrow[u, bend right, "\sigma"'] \arrow[r, two heads, "U_\alpha"] & (L, \alpha_L)
\end{tikzcd}
$$

Entonces, existe un único homomorfismo de álgebras Hom-Leibniz $\sigma : \left(\mathfrak{uce}_\alpha^{Leib}(L), \widetilde{\alpha}\right) \to (K, \alpha_K)$ tal que $U_\alpha \cdot \rho \cdot \sigma = U_\alpha$.

$$
\begin{tikzcd}
 & (P, \alpha_P) \arrow[d, tail] & \\
 & (K, \alpha_K) \arrow[d, "\rho"'] \arrow[dr, "U_\alpha \cdot \rho"] & \\
Ker(U_\alpha) \arrow[r, tail] & (\mathfrak{uce}_\alpha^{Leib}(L), \widetilde{\alpha}) \arrow[u, bend right, "\sigma"'] \arrow[r, two heads, "U_\alpha"] & (L, \alpha_L)
\end{tikzcd}
$$

Entonces, existe un único homomorfismo de álgebras Hom-Leibniz $\sigma : \left(\mathfrak{uce}_\alpha^{Leib}(L), \widetilde{\alpha}\right) \to (K, \alpha_K)$ tal que $U_\alpha \cdot \rho \cdot \sigma = U_\alpha$.

Puesto que también $U_\alpha \cdot Id = U_\alpha$, entonces $\rho \cdot \sigma = Id$.

$$
\begin{tikzcd}
 & (P,\alpha_P) \arrow[d, tail] & \\
 & (K,\alpha_K) \arrow[d, "\rho"', shift right] \arrow[dr, two heads, "U_\alpha\cdot\rho"] & \\
Ker(U_\alpha) \arrow[r, tail] & (\mathfrak{uce}_\alpha^{Leib}(L),\widetilde{\alpha}) \arrow[u, bend right, "\sigma"'] \arrow[r, two heads, "U_\alpha"] & (L,\alpha_L)
\end{tikzcd}
$$

Entonces, existe un único homomorfismo de álgebras Hom-Leibniz $\sigma : \left(\mathfrak{uce}_\alpha^{Leib}(L), \widetilde{\alpha}\right) \to (K, \alpha_K)$ tal que $U_\alpha \cdot \rho \cdot \sigma = U_\alpha$.

Puesto que también $U_\alpha \cdot Id = U_\alpha$, entonces $\rho \cdot \sigma = Id$.

Para probar el isomorfismo establecido en la segunda afirmación del teorema, consideremos el siguiente diagrama:

Extensiones centrales α-universales

$$
\begin{tikzcd}
 & & \left(\mathfrak{uce}_{\alpha}^{Leib}(L), \widetilde{\alpha}\right)^{\mathrm{ann}} \arrow[dl] & \\
 & \left(\mathfrak{uce}_{\alpha}^{Leib}(L), \widetilde{\alpha}\right) \arrow[r, "U_\alpha"] \arrow[dl] \arrow[dd, "\Phi"] & (L, \alpha_L) \arrow[r] \arrow[dd, equal] & 0 \\
\left(\left(\mathfrak{uce}_{\alpha}^{Leib}(L)\right)_{\mathrm{Lie}}, \widetilde{\alpha}_{\mathrm{Lie}}\right) \arrow[urr, dashed, "\gamma"] \arrow[dr, dashed, "\overline{\Phi}"] & & & \\
 & \left(\mathfrak{uce}_{\alpha}^{Lie}(L), \overline{\alpha}\right) \arrow[r, "u_\alpha"] & (L, \alpha_L) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

en el que $\overline{\Phi}$ está inducido por Φ y γ por U_α.

Extensiones centrales α-universales

Como $u_\alpha : \left(\mathfrak{uce}_\alpha^{Lie}(L), \overline{\alpha}\right) \to (L, \alpha_L)$ es una extensión α-central universal, por lo tanto es una extensión central universal, y dado que $\gamma : \left(\left(\mathfrak{uce}_\alpha^{Leib}(L)\right)_{\mathrm{Lie}}, \widetilde{\alpha}_{\mathrm{Lie}}\right) \to (L, \alpha_L)$ es una extensión central, entonces existe un único homomorfismo $\Psi : \left(\mathfrak{uce}_\alpha^{Lie}(L), \overline{\alpha}\right) \to \left(\left(\mathfrak{uce}_\alpha^{Leib}(L)\right)_{\mathrm{Lie}}, \widetilde{\alpha}_{\mathrm{Lie}}\right)$ tal que $\gamma\Psi = u_\alpha$.

Extensiones centrales α-universales

Como $u_\alpha : \left(\mathfrak{uce}_\alpha^{Lie}(L), \overline{\alpha}\right) \to (L, \alpha_L)$ es una extensión α-central universal, por lo tanto es una extensión central universal, y dado que $\gamma : \left(\left(\mathfrak{uce}_\alpha^{Leib}(L)\right)_{\mathrm{Lie}}, \widetilde{\alpha}_{\mathrm{Lie}}\right) \to (L, \alpha_L)$ es una extensión central, entonces existe un único homomorfismo $\Psi : \left(\mathfrak{uce}_\alpha^{Lie}(L), \overline{\alpha}\right) \to \left(\left(\mathfrak{uce}_\alpha^{Leib}(L)\right)_{\mathrm{Lie}}, \widetilde{\alpha}_{\mathrm{Lie}}\right)$ tal que $\gamma\Psi = u_\alpha$.

Para finalizar facilmente comprobamos que $\overline{\Phi}$ y Ψ son inversos.
$\square$

Extensiones centrales α-universales

Proposición

Sea (L, α_L) *una álgebra Hom-Lie perfecta y sean* $(\mathfrak{uce}_{Lie}(L), \overline{\alpha})$ *y* $(\mathfrak{uce}_{Leib}(L), \widetilde{\alpha})$ *sus extensiones centrales universales en las categorías* Hom-Lie *y* Hom-Leib, *respectivamente.*

$$(\mathfrak{uce}_{Lie}(L), \overline{\alpha}) \simeq (\mathfrak{uce}_{Leib}(L), \widetilde{\alpha}) \Longleftrightarrow H_2^{\alpha}(L) \simeq HL_2^{\alpha}(L).$$

Extensiones centrales α-universales
Demostración

. Si (L, α_L) es perfecta en la categoría Hom-Lie,entonces se puede construir el siguiente diagrama conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & HL_2^{\alpha}(L) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\sigma_|"] & (\mathfrak{uce}_{Leib}(L), \widetilde{\alpha}) \arrow[r, "U"] \arrow[d, dashed, "\exists ! \sigma"] & (L, \alpha_L) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 & (\mathrm{Hom}-\mathrm{Leib}) \\
0 \arrow[r] & H_2^{\alpha}(L) \arrow[r] & (\mathfrak{uce}_{Lie}(L), \overline{\alpha}) \arrow[r, "u"] & (L, \alpha_L) \arrow[r] & 0 & (\mathrm{Hom}-\mathrm{Lie})
\end{tikzcd}
$$

Gracias por su atención!